jml@ecole-alsacienne.org
2007-2008

CORRIGÉ - Term.S2 Cont. N°3- p.1/3
21 Novembre – Durée 1h.

Nom

R.O.C. Star Exponentielle

Inscrire les démonstrations dans les zones encadrées

Note

ROC . I [6 pts] **Euler super-star** ***

Hypothèses : *(i) On rappelle qu'une fonction f est dérivable en a si et seulement si on a la relation :*
f(a+h) = f(a) + h. f '(a) + h.ε(h) *avec limε(h)= 0 quand h tend vers 0*
(ii) On suppose que f est une fonction dérivable sur R telle que ***f ' = f et f(0) = 1***

a. *Démontrer que quelque soit h infiniment petit, on a* $\boxed{f(h) \approx 1 + h}$

Par hypothèse, on a l'égalité f(a+h) = f(a) + h. f '(a) + h.ε(h) donc pour h infiniment petit,
f(a+h) ≈ f(a) + h. f '(a) , et comme f' = f on a en particulier f'(a) = f(a),
d'où f(a+h) ≈ f(a) + h. f (a) = (1+h) f(a).
En particulier pour a = 0, on en tire f(0+h) ≈ (1+h) f(0) et comme par hypothèse f(0) = 1,
On peut conclure que ***f(h) ≈ 1 +h . C.Q.F.D.***

b. *En déduire par récurrence que quelque soit n, entier naturel, on a* $\boxed{f(n.h) \approx (1 + h)^n}$

Soit (P_n) *la relation* $f(n.h) \approx (1 + h)^n$
INITialisation : (P_0) $f(0) \approx (1 + h)^0$ ***ce qui est vrai car*** $f(0)=1$ ***et*** $(1 + h)^0 = 1$
HEREDité : soit n fixé, $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$ *est Vraie également, car :*
f[(n + 1)h] = f(nh + h) et d'après l'hypothèse en prenant a = nh on obtient ≈ (1 + h)f(nh)
donc en utilisant (P_n) : $f[(n + 1)h] \approx (1 + h).$ $(1 + h)^0 = (1 + h)^{0+1}$, ***d'où*** (P_{n+1}).
CONCLusion : quelque soit n entier naturel (P_n) *est vrai, i.e. a* $f(n.h) \approx (1 + h)^n$ ***C.Q.F.D.***

c. *En déduire alors que quelque soit n très grand positif on a* $\boxed{f(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

Pour n très grand positif on peut poser $h = \frac{1}{n}$ ***et donc h très petit.***

Par suite $f(n.h) = f(n.\frac{1}{n}) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *i.e.* $f(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *C.Q.F.D.*

NB : une valeur approchée de la limite, notée ***e***, *de cette expression est 2,71828…*

ROC . II [4 pts] **Homomorphisme transcendental** ***

Hypothèses : *On suppose que f est une fonction dérivable sur R telle que*
(i) quelques soient les réels u et v on ***a f(u + v) = f(u)*** x ***f(v)***
(ii) f(0) = 1
(iii) f '(0) = k .

Démontrer que :

a. *f(x) > 0 pour tout x Réel.*

D'après (i) on a pour tout x Réel : $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2}) = \left[f(\frac{x}{2})\right]^2 \geq 0$.

Mais comme f(0) = 1 on a pour tout x Réel f(x) > 0 ,
En effet s'il existait un nombre v tel que f(v) = 0 alors on aurait f(v-v) = f(v).f(-v),
c'est à dire f(0) = 0 ce qui est absurde (contraire à l'hypothèse (ii)).

b. f '(x) = k. f(x) pour tout x Réel

On pose F(x) = f(a+x) – f(a).f(x).

D'après l'hypothèse (i) cette fonction est nulle pour tout x Réel.

Donc sa dérivée est nulle pour tout x : F'(x) = 0 d'où f '(a+x) = f(a).f '(x) (a est une constante)

En particulier, pour x=0 on a f '(a + 0) = f(a).f '(0) donc d'après l'hyp. (ii), f '(a) = k.f(a) pour tout a.

Ainsi en généralisant cette relation, on peut écrire f'(x) = kf(x) pour tout x Réel. C.Q.F.D.

ROC . III [6 pts] **Limites infiniment** ***

<u>Hypothèses</u> : (i) $(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$, $e^{u+v} = e^u . e^v$, $e^{-u} = \dfrac{1}{e^u}$, $e^{nu} = (e^u)^n$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

<u>*Démontrer que*</u> :.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Pour lever cette indétermination , on doit minorer la fraction par une expression qui tend vers +∞ quand x tend vers +∞. Soit U(x) = e^x – x., montrons que cette fonction est toujours positive :
U'(x) = e^x – 1 . Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur R, donc x > 0 ⇒ $e^x > e^0 = 1$.
Par suite U'(x) toujours positive sur R+, et donc U est croissante sur R+.
Mais comme U(0) = e^0 – 0 = 1 > 0 on en déduit que pour tout x > 0, U(x) > 0, i.e. e^x > x.

En particulier $e^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2} \Rightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow e^x > \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{4} \to +\infty$ *C.Q.F.D.*

b. En déduire que quelque soit n entier naturel, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

On peut écrire $\dfrac{e^x}{x^n} = \left[\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right]^n . \dfrac{1}{n^n}$ *d'où en posant* $X = \dfrac{x}{n}$ *on a* $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^n . \dfrac{1}{n^n}$

Or d'après (a) $\lim\limits_{X=\frac{x}{n}\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ *(n constante) d'où* $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^n . \dfrac{1}{n^n} \to +\infty$ *. C.Q.F.D*

c. En déduire que quelque soit n entier naturel, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

On peut écrire $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{(-x)^n}{e^{(-x)}} = (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X}$ *avec X = (-x) qui tend vers +∞ quand x tend vers -∞*

Or d'après (b) on a $\lim\limits_{X=-x\to+\infty} \dfrac{X^n}{e^X} = 0^+$ *donc* $\lim\limits_{X=-x\to+\infty} (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X} = 0$ *C.Q.F.D.*

On peut préciser : 0+ si n est pair, et 0- si n est impair.

ROC . IV [4 pts] **Equations différentielles faciles *****

Hypothèses : *On suppose que* $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x$

Démontrer que :

a. $f'(x) = kf(x)$ avec $f(0) = A \Rightarrow f(x) = Ae^{kx}$

Montrons d'abord que si une fonction g a la propriété g '(x) = k.g(x) avec g(0) = 1, alors g(x)=e^{kx}.

En effet soit $h(x) = g\left(\frac{x}{k}\right)$ *alors on a* $h'(x) = \frac{1}{k}g'\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}k.g\left(\frac{x}{k}\right) = g\left(\frac{x}{k}\right) = h(x)$ *(fonctions composées)*

Par suite d'après l'hypothèse avec h(0) = g(0) = 1 on en déduit h(x) =e^{x}*, d'où h(kx) = e*^{kx} *or on a g(x) = h(kx) d'où la relation g(x)=e*^{kx} *.*

On pose alors $F(x) = \frac{f(x)}{A}$ *d'où* $F'(x) = \frac{f'(x)}{A} = \frac{k.f(x)}{A} = k.F(x)$ et $F(0) = \frac{f(0)}{A} = \frac{A}{A} = 1$

Donc d'après la démonstration préliminaire F(x) = e^{kx} *et par suite f(x) = A e*^{kx} *C.Q.F.D.*

b. $y' = ay + b \Rightarrow y = Ae^{ax} - \frac{b}{a}$

On pose $z = y + \frac{b}{a}$ *d'où z' = y' = a.y + b = a.z*

donc z'(x) = a z(x)

et en supposant que z(0) = A on en déduit d'après la démos (a) que

z =A e^{ax}

Et par suite $y = z - \frac{b}{a} = Ae^{ax} - \frac{b}{a}$ *C.Q.F.D.*