jml@ecole-alsacienne.org
2007-2008

Term.S_2 Cont. N°3- p.1/3
21 Novembre – Durée 1h.

Nom

R.O.C. Star Exponentielle

Inscrire les démonstrations dans les zones encadrées

Note

ROC . I [6 pts] **Euler super-star** ***

Hypothèses : *(i) On rappelle qu'une fonction f est dérivable en a si et seulement si on a la relation :*

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon(h) \text{ avec } \lim \varepsilon(h) = 0 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0$$

(ii) On suppose que f est une fonction dérivable sur R telle que $f' = f$ *et* $f(0) = 1$

a. *Démontrer que quelque soit h infiniment petit, on a* $\boxed{f(h) \approx 1 + h}$

b. *En déduire par récurrence que quelque soit n, entier naturel, on a* $\boxed{f(n.h) \approx (1+h)^n}$

c. *En déduire alors que quelque soit n très grand positif on a* $\boxed{f(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

ROC . II [4 pts] **Homomorphisme transcendental** ***

Hypothèses : *On suppose que f est une fonction dérivable sur R telle que*

(i) quelques soient les réels u et v on ***a*** $f(u+v) = f(u) \times f(v)$

(ii) $f(0) = 1$

(iii) $f'(0) = k$.

Démontrer que :

a. $f(x) > 0$ *pour tout x Réel.*

b. $f'(x) = k.f(x)$ *pour tout x Réel*

ROC . III [6 pts] **Limites infiniment** ***

Hypothèses : (i) $(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$, $e^{u+v} = e^u . e^v$, $e^{-u} = \frac{1}{e^u}$, $e^{nu} = (e^u)^n$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Démontrer que :.

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

b. En déduire que quelque soit n entier naturel, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

c. En déduire que quelque soit n entier naturel, $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

ROC . IV [4 pts] **Equations différentielles faciles *****

Hypothèses : *On suppose que* $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x$

Démontrer que :

a. $f'(x) = kf(x)$ avec $f(0) = A \Rightarrow f(x) = Ae^{kx}$

b. $y' = ay + b \Rightarrow y = Ae^{ax} - \dfrac{b}{a}$