

Nombres Complexes et Suites Numériques (Calculatrices autorisées)

EXERCICE I [3 pts] Quelques R.O.C. de mise en jambes ...

1°) Hypothèses : on donne 3 points distincts A, B, C , du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C .

$$\text{On pose } Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}.$$

- Démontrer que A, B, C , sont alignés si et seulement si Z est Réel.
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si Z est imaginaire pur

2°) Hypothèses : soit (u_n) une suite numérique à termes Réels, définie par récurrence à l'aide d'une fonction numérique f , c'est à dire telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que f est croissante sur un intervalle $[a ; b]$ et que $[f(a); f(b)] \subset [a ; b]$.

- Démontrer par récurrence que si $u_0 \in [a ; b]$ alors quel que soit n , $a \leq u_n \leq b$.
- Démontrer par récurrence que si $u_1 \leq u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

3°) Hypothèses : soient deux suite numériques adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

- Démontrer que l'on a nécessairement : quelque soit n , $u_n \leq v_n$.
- Démontrer que (u_n) et (v_n) ont nécessairement la même limite.

EXERCICE II [7 pts] Étude de suites composées : (a_n) et (b_n) définies par la récurrence croisée :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n), \quad a_0 = 2, \quad b_0 = 4$$

A – Étude dans les nombres Réels.

On pose $U_n = a_n + b_n$; $V_n = a_n - b_n$; $P_n = a_n \cdot b_n$; $Q_n = P_n - 9$

- Démontrer que (U_n) est constante, indiquer cette constante.
- Démontrer que (V_n) est géométrique, indiquer sa raison et le premier terme
- Exprimer a_n et b_n en fonction de n ,
- Montrer que a_n et b_n sont convergentes vers une même limite et calculer cette limite.
- Démontrer que (Q_n) est géométrique, indiquer sa raison et le premier terme.
- Calculer P_n en fonction de n et indiquer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

B – Étude dans les nombres Complexes.

On pose $Z_n = a_n + ib_n$ et on appelle A_n son image dans le plan complexe.

- Calculer $(a_n)^2 + (b_n)^2$ en fonction de U_n et de P_n
- Exprimer $|Z_n|$ en fonction de n .
- Calculer la limite de $|Z_n|$
- Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers l'infini ?

EXERCICE III - [6pts] Étude de la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 1 + \frac{6}{U_n}$

A – On pose $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$ pour $x > 0$.

- Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite (U_n) dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux).
- D'après la figure obtenue, la suite (U_n) est-elle monotone ? bornée ?
- Montrer par récurrence que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 7$
- Démontrer que la fonction f admet un point fixe α unique sur l'intervalle $[1 ; 7]$.

B – On pose $g(x) = \frac{7x+6}{x+6}$, $V_n = U_{2n}$ suite des termes de rang pair et $W_n = U_{2n+1}$ la suite des

termes de rang impair. On se propose de démontrer que (V_n) et (W_n) sont adjacentes.

- Démontrer que $g(x) = f[f(x)]$ et indiquer son sens de variation sur $[1 ; 7]$.
- Montrer que $V_{n+1} = g(V_n)$ et de même que $W_{n+1} = g(W_n)$
- Démontrer par récurrence que (V_n) est strictement croissante et que (W_n) est strictement décroissante.

Nombres Complexes et Suites Numériques
(Calculatrices autorisées)

- 4°) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq V_n \leq W_n \leq 7$
 5°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n - V_n \leq \frac{3}{4} (W_{n-1} - V_{n-1})$
 6°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq W_n - V_n \leq 6 \left(\frac{3}{4}\right)^n$
 7°) En déduire la limite de $[W_n - V_n]$
 8°) En déduire la limite de (V_n) , (W_n) et (U_n) .

EXERCICE IV [4 points]

Dans plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et Ω d'affixes respectives $a = -1 + \sqrt{3} + i$ et $\omega = -1 + 2i$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $2\pi/3$, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-1/2$.

1°) Placer sur la figure les points A et Ω , puis l'image B du point A par r , l'image C du point B par r et l'image D du point A par h .

2°) On note b , c , et d les affixes des points B , C , D . Le tableau suivant contient une suite de 18 affirmations dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne, dans les colonnes 2, 3 ou 4. Indiquer VRAI ou FAUX en toutes lettres dans chacune des cases du tableau.

1	$ a - \omega =$	2	4	$\sqrt{3} - i$
2	$\arg(a - \omega) =$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{47\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
3	$(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega C}) =$	$\arg((\omega - c)i)$	$(-\vec{v}, \overrightarrow{C\Omega})$	$\frac{2\pi}{3}$
4	$\omega =$	$\frac{1}{3}(a + b + c)$	$a + b + c$	$b - 2i$
5	$\frac{b - d}{a - d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$
6	Le point D est	L'image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	L'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$	L'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$