BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

obligatoire

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6, dont une page annexe à rendre avec la copie

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 etU_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé,

• s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;

• s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;

• si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1. »

B: « Le dé amène un multiple de trois. »

C: « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »

N: « La boule tirée est noire.»

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

a. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.

Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ (2π)

b. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :

$z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

<u>Démonstration de cours</u> : Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. *a.* Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

   b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$?

   c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

   a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

   b. Donner l'écriture complexe de r.

   c. Déterminer l'affixe du point E.

Tournez la page S.VP.

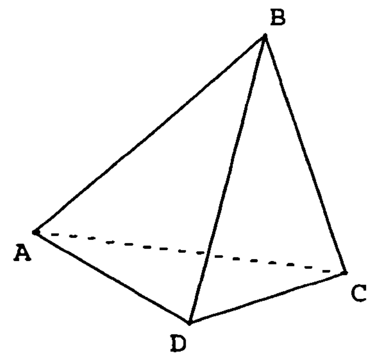
Exercice 3 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. *a.* Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

   b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. *a.* Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

   b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

   c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

   d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Exercice 4 *(7 points)*

Commun à tous les candidats

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0;20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.

a. Étudier les variations de f sur $[0;20]$

b. En déduire que pour tout $x \in [0;10]$, $f(x) \in [0;10]$

c. On donne **en annexe** la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x. On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

   a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

   b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3. Étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Tournez la page S.V.P.

ANNEXE

À rendre avec la copie