Baccalauréat Blanc n$^{\text{o}}$ 2 série S
- Ecole Alsacienne- Avril 2008

Durée : 4 heures

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g\ :\ t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,1828182845E−01	7,1828182846E−01
2	4,3656365691E−01	4,3656365692E−01
3	3,0969097075E−01	3,0969097076E−01
4	2,3876388301E−01	2,3876388304E−01
5	1,9381941508E−01	1,9381941520E−01
6	1,6291649051E−01	1,6291649120E−01
7	1,4041543358E−01	1,4041543840E−01
8	1,2332346869E−01	1,2332350720E−01
9	1,0991121828E−01	1,0991156480E−01
10	9,9112182825E−02	9,9115648000E−01
11	9,0234011080E−02	9,0272128000E−02
12	8,2808132963E−02	8,3265536000E−02
13	7,6505728522E−02	8,2451968000E−02
14	7,1080199309E−02	1,5432755200E−01
15	6,6202989636E−02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E−02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E−03	3,3965641216E+02
18	−8,7016273909E−01	6,1128154189E+03
19	−1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	−3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	−7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	−1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	−3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	−8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	−2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. **a.** Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = u_n + (n!)(a + 2 - \mathrm{e})$$

   où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
   (On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. **Restitution organisée de connaissances**
   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

   P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

   Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.
2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.
   a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
   b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

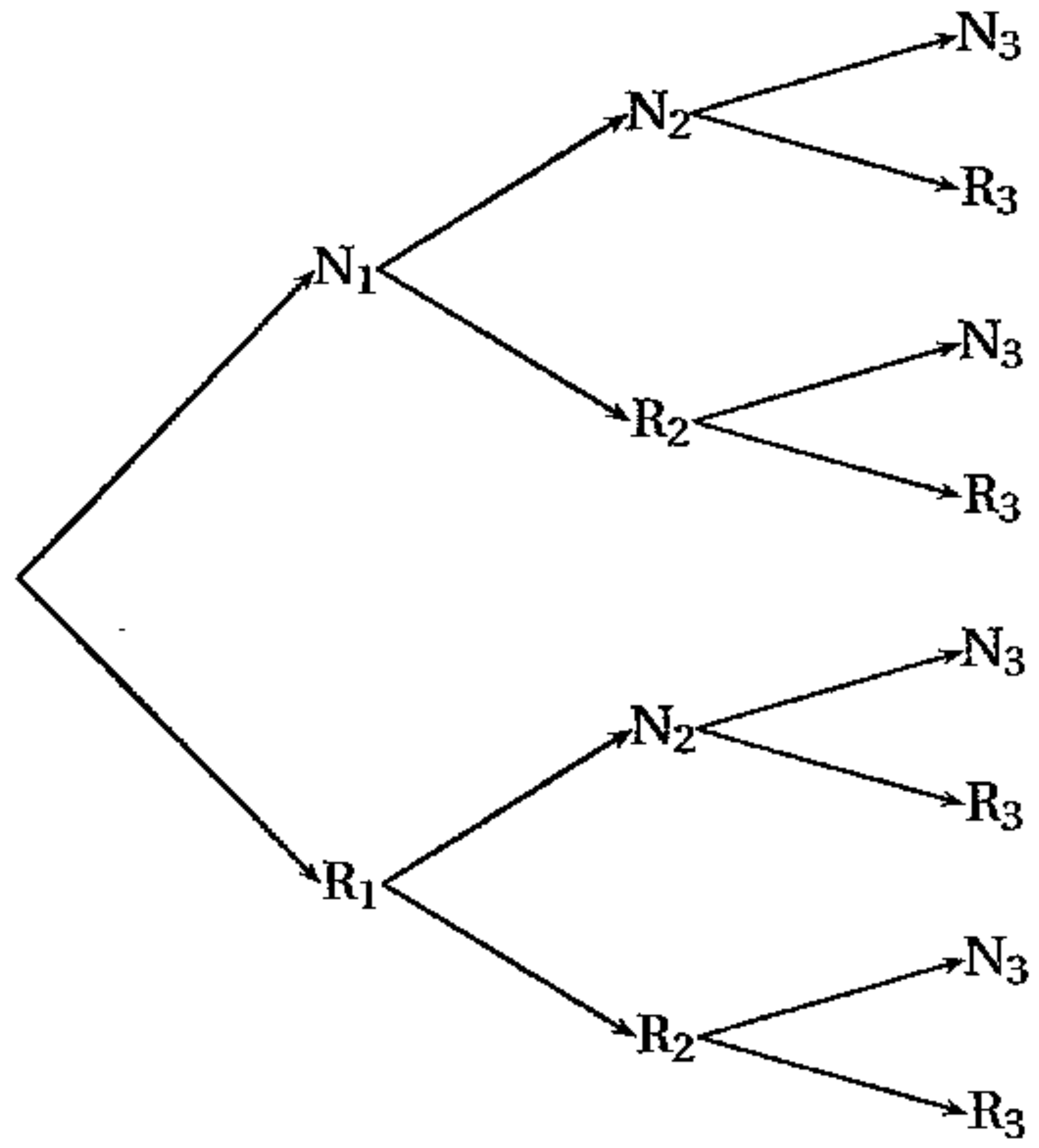
On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a. Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.
   c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

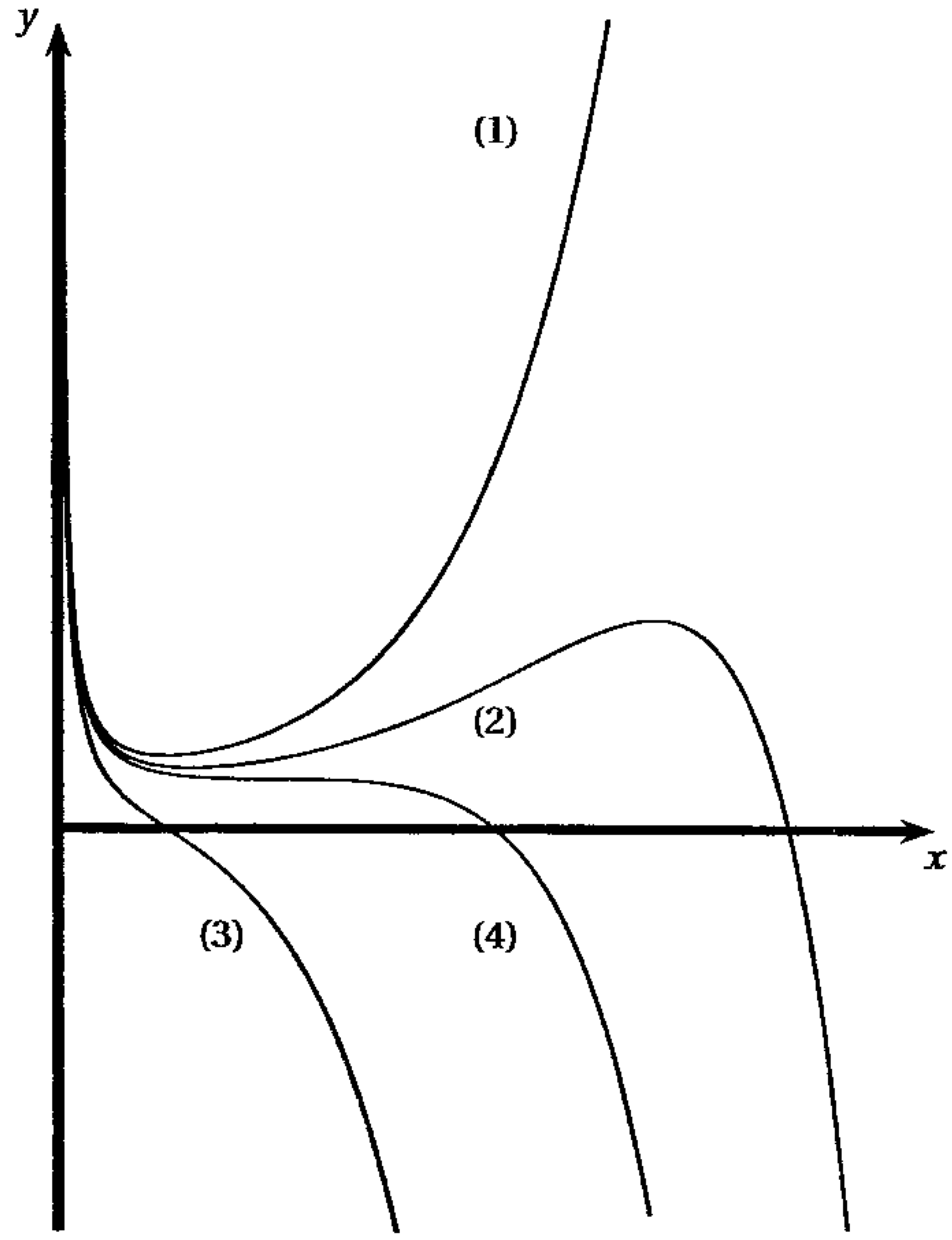
On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).
   b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v-u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
   c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).
2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x.$$

   a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
   b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



Exercice 5 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). On considère les points A d'affixe -4, B d'affixe 4, E d'affixe $4i$. Les points C et D sont placés de sorte que les quadrilatères $AOEC$ et $BOED$ soient des carrés. Soit I le milieu de $[AO]$ et J celui de $[OD]$.

0,5 1. Placer les points précédents dans le repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ et déterminer les affixes des points C, D, I et J.

2. Soit f la similitude directe qui transforme A en O et O en D.

   0,5 (a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

   0,5 (b) Déterminer l'image par f de I et de la médiatrice de $[AO]$ (justifier).

   0,75 (c) Déterminer l'image de C par f (justifier).

   0,5 (d) Démontrer que f associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe

$$z' = (1+i)z + 4 + 4i$$

   0,75 (e) Retrouver, en utilisant l'écriture complexe de f, l'angle, le rapport et le point fixe de f.

3. (a) i. Exprimer, pour tout point M d'affixe z, l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z. En déduire qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$. 0,5

   ii. Montrer que l'image de I par f est J et en déduire l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ 0,5

   (b) Donner une construction géométrique simple de l'image de M par f. Retrouver, par un raisonnement géométrique qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$. 0,5