IX – Applications Théoriques

1°) Formules Algébriques :

Exp (a + b) = Exp(a) . Exp(b) ; Exp (0) = 1 ; Exp (1) = e ; $Exp(-a)=\dfrac{1}{Exp(a)}$; $Exp(a-b)=\dfrac{Exp(a)}{Exp(b)}$

$Exp(na)=\left(Exp(a)\right)^n$; $Exp(\dfrac{a}{n})=\sqrt[n]{Exp(a)}$ (n >1) . D'où les formules :

$\boxed{e^{a+b}=e^a\,.\,e^b}$ $\boxed{e^0=1}$ $\boxed{e^1=e}$ $\boxed{e^{-a}=1/e^a}$ $\boxed{e^{a-b}=e^a/e^b}$ $\boxed{e^{na}=(e^a)^n}$ $\boxed{e^{a/n}=(e^a)^{1/n}}$

2°) Formules Analytiques : Dérivation d'une fonction composée avec l'exponentielle :

Soit u une fonction dérivable sur R et *f(x) = Exp [u(x)],* alors *f '(x) = u'(x).Exp[u(x)]*

ou $\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=e^{u(x)}.u'(x)}$ En particulier $\boxed{\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}}$

- *Formule à ne pas confondre avec la dérivation des puissances :* $[U^n(x)]'=n\,U'(x).U^{n-1}(x)$

3°) Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

i) *Rappel* $\boxed{f'(x)=f(x)\ \text{ et }\ f(0)=1\Leftrightarrow f(x)=e^x}$ *c'est par définition **la** fonction dite Exponentielle qui coïncide avec celle déterminée par la méthode d'Euler, et qui possède toutes les propriétés ci-dessus.*

ii) $\boxed{f'(x)=kf(x)\ \text{ avec }\ f(0)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{kx}}$

- *Démo de l'implication (* $\Rightarrow$ *) : on pose* $g(x)=f(\dfrac{x}{k})$ *d'où* $g'(x)=\dfrac{1}{k}f'(\dfrac{x}{k})=\dfrac{1}{k}k.f(\dfrac{x}{k})=f(\dfrac{x}{k})=g(x)$

d'où g'(x) = g(x) Donc d'après (i) on a $g(x)=e^x\Rightarrow g(kx)=e^{kx}\Rightarrow f(x)=e^{kx}$ car $f(x)=g(kx)$

- *La réciproque (* $\Leftarrow$ *) est évidente :* $y=e^{kx}\Rightarrow y'=ke^{kx}\Rightarrow y'=ky$ *mais comme on a démontré plus haut que l' équation f '(x) = k. f (x) avec f(0) = 1, admet une solution unique,, la fonction trouvée est l'unique solution.*

iii) $\boxed{f'(x)=kf(x)\ \text{ avec }\ f(0)=A\Leftrightarrow f(x)=Ae^{kx}}$

- *Démo de l'implication (* $\Rightarrow$*) : on pose* $h(x)=\dfrac{f(x)}{A}$ *d'où* $h'(x)=\dfrac{1}{A}f'(x)=\dfrac{1}{A}k.f(x)=k.h(x)$

*d'où h'(x) = k.h(x) et d'autre part **h(0) = 1** Donc d'après (ii) on a* $h(x)=e^{kx}$ *d'où* $f(x)=A.\,e^{kx}$.

- *La réciproque (* $\Leftarrow$ *) est évidente :* $y=Ae^{kx}\Rightarrow y'=Ake^{kx}\Rightarrow y'=ky$ *et* $y(0)=A$.

iv) Cas général : $\boxed{y'=ay+b\Leftrightarrow y=Ae^{ax}-\dfrac{b}{a}}$ *NB : si b = 0 on retrouve dans le cas précédent.*

On pose $z=y+\dfrac{b}{a}$ *d'où* $z'=y'=a.y+b=a.z$

donc z'(x) = a z(x) et en supposant que z(0) = A $\Rightarrow z=A\,e^{ax}$

Et par suite $y=z-\dfrac{b}{a}=Ae^{ax}-\dfrac{b}{a}$ *C.Q.F.D.*

si y(0) = c (c constante donnée, alors $c=A-\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow A=c+\dfrac{b}{a}$

- *En pratique on écrit la formule ci-dessus et on calcule A, si nécessaire, en utilisant les données du problème (« conditions initiales »).*

NB : la notation *y'* est souvent utilisée à la place de *f '(x)* pour abréger les formules. On écrit alors aussi parfois *y(0)* au lieu de *f(0).*

- *Ces équations différentielles sont au centre de l'étude de problèmes physiques et biologiques que l'on va examiner dans les pages suivantes :*

Désintégration des noyaux radioactifs / Constante de temps / Demi-vie.
Décharge d'un condensateur
Charge d'un condensateur

X – Applications Expérimentales

1°) Désintégration d'un noyau radioactif .

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante :

Si N(t) est le nombre de noyaux à l'instant t, le *taux de désintégration* des noyaux $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ est proportionnel au nombre de noyaux, c'est à dire que $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \quad avec \quad \lambda > 0$ car il y a diminution du nombre de noyaux.

En passant à la limite quand $\Delta t \to 0$, on obtient, en supposant la fonction N dérivable et N_0 le nombre de noyau à l'instant initial t = 0,

$$\boxed{N'(t) = -\lambda N(t)} \quad avec \quad N(0) = N_0 \text{ constante donnée.}$$

On en déduit immédiatement d'après (iii) dans le § IX-3°) que $\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$

La fonction N est donc strictement décroissante sur [0 ; +∞[et tend vers 0 en +∞.

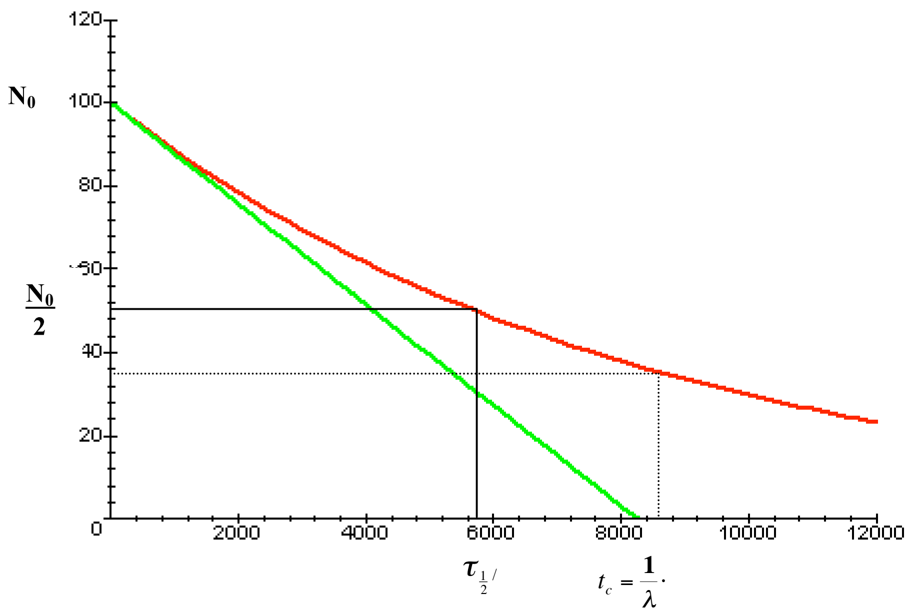
La tangente au point d'abscisse t = 0 a pour équation **y = - λ N₀ t + N₀** et coupe l'axe des abscisses en $\boxed{t_c = \dfrac{\mathbf{1}}{\lambda}}$.

Cette constante est appelée **constante de temps** ou *temps caractéristique* de l'atome considéré. Cette constante n'est autre que la *sous-tangente* associée à cette exponentielle.

D'autre part on appelle **Demie-Vie** la durée nécessaire pour que le nombre de noyaux diminue de moitié. Cette constante notée $\tau_{1/2}$ dépend de la valeur de **λ.**

En effet on a $N(\tau_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2} \quad i.e. \quad N_0 e^{-\lambda \tau_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2} \quad donc \quad e^{-\lambda \tau_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$ ce qui en prenant le *logarithme népérien* (*inverse de la fonction Exponentielle étudiée plus loin*), donne :

$$-\lambda \tau_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow \boxed{\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}} \Leftrightarrow \tau_{1/2} = t_c \ln 2 \approx 0{,}7 t_c$$



Sur la figure ci-dessus on a pris les valeurs correspondant au Carbone 14 dont la demi-vie est évaluée à __1/2 = ***5730 ans*** *par comparaison avec d'autres phénomènes. L'unité de temps choisie est l'année. Les ordonnées représentent en fait des % en quantité de C_{14} à partir de* ***N₀ = 100 (%).***

Ainsi obtient-on $t_c = \dfrac{\mathbf{1}}{\lambda} = \dfrac{5730}{0{,}7} \approx 8266$ *ans et donc* $\lambda = \dfrac{1}{8266} \approx 1{,}2.10^{-4}$ *d'où l'équation de la courbe.*

On peut montrer également que quelque soit t on a $N(t + \tau_{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2} N(t)$ *, ce qui justifie l'expression « demi-vie »*

En effet on a $N(t + \tau_{\frac{1}{2}}) = N_0 e^{-\lambda(t+\tau_{\frac{1}{2}})} = e^{-\lambda t} N_0 e^{-\lambda \tau_{\frac{1}{2}}} = e^{-\lambda t}.\dfrac{N_0}{2} = \dfrac{1}{2} N(t) \qquad C.Q.F.D$

<u>Application Numérique</u> : un fragment d'os contient 35 % de sa quantité initiale de C_{14} *.Déterminer son âge.*

On écrit que $35 = N_0 e^{-\lambda t} = 100.\, e^{-1{,}2.10^{-4}\, t}$ d'où par passage au logarithme néperien : $1{,}2.10^{-4}$ t = - ln (0,35)

On trouve à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur : t = - ln (0,35) / $1{,}2.10^{-4}$ ≈ 8750 ans que l'on peut lire sur le graphique.(. . . *et comme dirait Euler il Népérien pour attendre !)*

2°) Croissance d'une population de bactéries.

On observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries.
Soit N(t) le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en heures). N étant supposée dérivable sur [0 ; +∞ [
Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle :

$$\boxed{N' = 0{,}7N(1 - 10^{-3}N)}$$ appelée *Équation logistique*

A - Pour résoudre cette équation différentielle du premier ordre mais non linéaire, on pose $P(t) = \frac{1}{N(t)}$, $N(t) > 0$

1. Démontrer que P vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre $P' = -0{,}7.\ P + 0{,}7.10^{-3}$
2. Résoudre cette équation différentielle en $P(t)$.
3. En déduire l'expression de $N(t)$ sachant que $N(0) = 100$.
4. Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction N obtenue.

B -On se propose de comparer le graphe de la fonction obtenue avec celui que l'on obtiendrait par la Méthode d'Euler de résolution de l'équation différentielle initiale.

1. Écrire l'équation de définition de la différentielle d'une fonction en un point en t=a pour dt = h très petit.
2. Établir la relation permettant de calculer approximativement N(a + h) en fonction de N(a) et de h.
3. Saisir dans un tableur la formule obtenue en partant de a = 0 jusqu'à 10 avec h = 0,1 , calculer les valeurs approximatives de N(t) à l'aide de la formule obtenue en (2°) et représenter graphiquement cette série de valeurs dans un graphe en mode « nuage de points » en précisant les abscisses et les ordonnées.
4. Dans une colonne supplémentaire calculer les valeurs obtenues par la résolution formelle de l'équation initiale en [A.(3°)], et représenter cette fonction dans le même graphe que précédemment.

Solution du §A : $P(t) = \frac{1}{N(t)}$ donne $P'(t) = \frac{-N'(t)}{N^2(t)}$ et donc en divisant par $N^2(t)$ les deux membres de l'équation logistique $N'(t) = 0{,}7N(t) - 0{,}7.10^{-3}N^2(t)$ on obtient immédiatement l'équation différentielle

$$P' = = -0{,}7.\ P + 0{,}7.10^{-3}$$

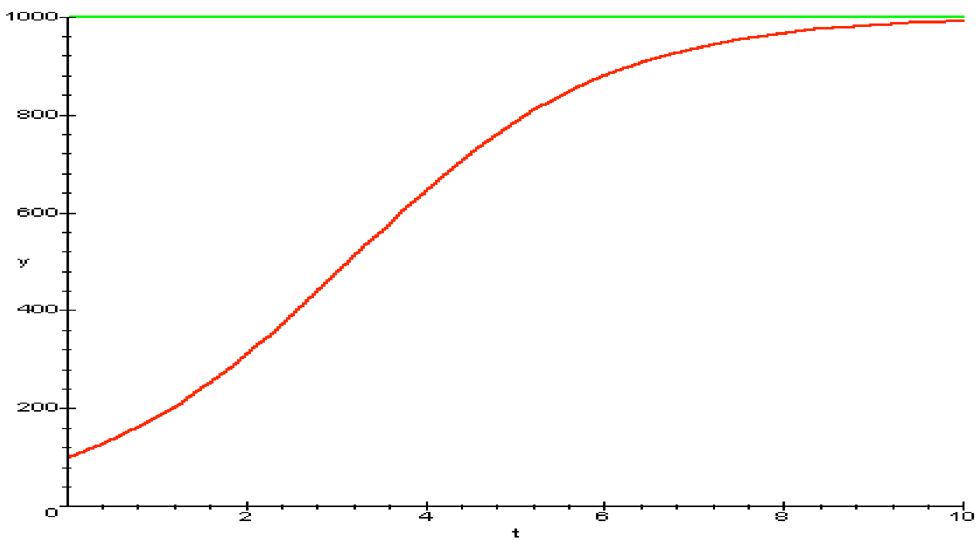
Cette équation est de la forme y' = a.y + b et a donc pour solution $y = Ae^{ax} - \frac{b}{a}$.

Ici on a $y = P$, $a = -0{,}7$; $b = 7.10^{-4}$ d'où le résultat $P(t) = Ae^{-0{,}7t} + 10^{-3}$ où A est une constante dépendant des conditions initiales.

On en déduit immédiatement $N(t) = \frac{1}{Ae^{-0{,}7t} + 10^{-3}}$; et comme par hypothèse on a N(0) = 100 on peut en déduire la valeur de A : en efft pour t = 0 on a . $e^{-0{,}7.\,0} = 1$ d'où $A + 10^{-3} = 10^{-2}$; donc $A = 0{,}010 – 0{,}001 = 0{,}009$.

$$\text{Donc } N(t) = \frac{1}{9.10^{-3}e^{-0{,}7.t} + 10^{-3}} \quad \text{d'où} \quad N(t) = \frac{1000}{9e^{-0{,}7.t} + 1}$$

En utilisant l'équation logistique initiale $N'(t) = 0{,}7N(t).[1 - 10^{-3}N(t)]$ et l' hypothèse 0 < N(t) < 1000, on en tire $N'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc N strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, et $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 1000$. d'où la courbe :



Solution du § B : Par définition de la différentielle d'une fonction en t = a on a pour tout accroissement dt = h :

dN = N'(a).dt et **_N ≈ dN** donc N(a + dt) – N(a) ≈ N'(a).dt ,

i.e. $\boxed{N(a + dt) \approx N(a) + N'(a).dt}$. (a ≥ 0)

Par suite en utilisant l'équation différentielle logistique initiale :

$$N(a + dt) \approx N(a) + 0,7\, N(a).\ (1 - 10^{-3}.\ N(a)).dt$$

$$N(k.dt + dt) \approx N(k.dt) + 0,7\, N(k.dt).\ (1 - 10^{-3}.\ N(k.dt)).dt$$

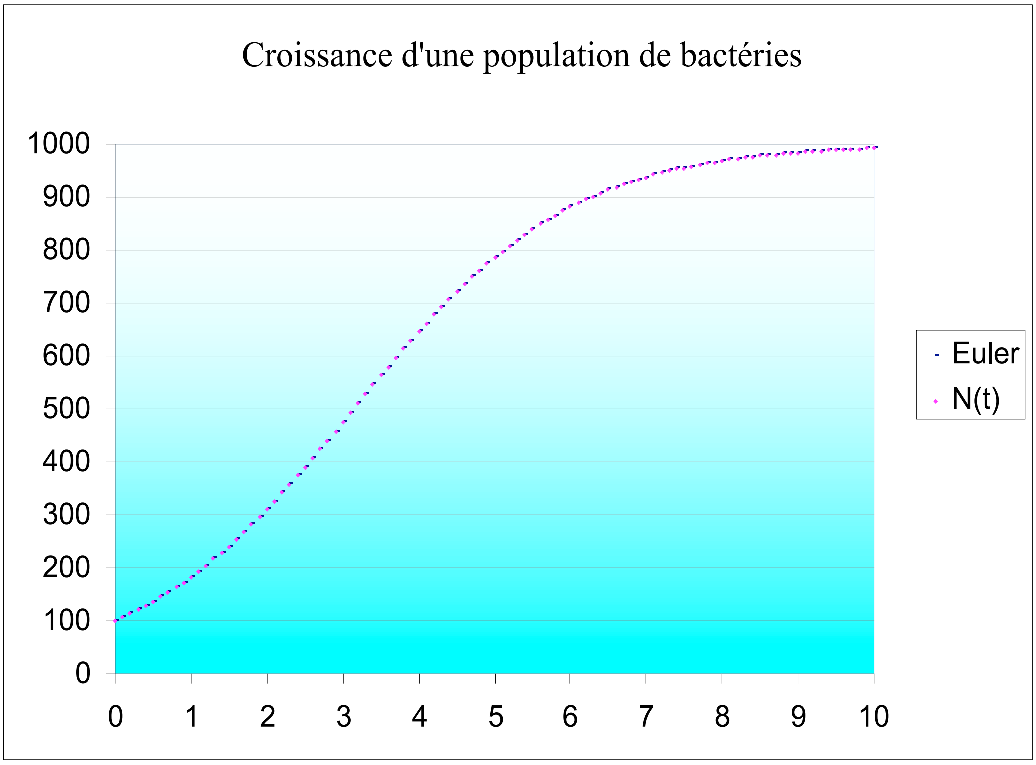
Donc si *dt* est fixé (par exemple *dt* = 0,1) et si on pose $N_k = N(k.dt)$, on a la relation de récurrence de construction de la solution par la méthode d'Euler :

$$\boxed{N_{k+1} = N_k + 0,7\, N_k.\ (1 - 10^{-3}.\ N_k).0,1} \quad (*)$$

On constate sur la figure ci-dessous que pour un *dt* = 0,1 la différence entre les deux courbes obtenues est infime.

Dans le tableur la formule (*) se construit en remplaçant N_k par la référence de la cellule précédente.

t	Euler	N(t)
0	100	100
0,1	106,3	106,48
0,2	112,95	113,32
0,3	119,96	120,55
0,4	127,35	128,17
0,5	135,13	136,2
0,6	143,31	144,65
0,7	151,91	153,52
0,8	160,93	162,84
0,9	170,38	172,61
1	180,27	182,84
1,1	190,62	193,53
1,2	201,42	204,69
1,3	212,68	216,32
1,4	224,4	228,43
1,5	236,58	241
1,6	249,22	254,03
1,7	262,32	267,52
1,8	275,87	281,46
1,9	289,85	295,83
2	304,26	310,62
2,1	319,08	325,8
2,2	334,29	341,36
2,3	349,86	357,27
2,4	365,79	373,5
2,5	382,02	390,02
2,6	398,55	406,8
2,7	415,33	423,79
2,8	432,33	440,97
2,9	449,51	458,29
3	466,83	475,71



NB : Ce deuxième exemple d'utilisation de la méthode d'Euler peut-être fréquemment utilisé pour résoudre des équations différentielles dont on ne peut expliciter les solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Gratte… Gratte… Gratte…. toujours …

Mais où est donc passé le Logarithme ???

(Comme disait Euler, Homer Néperien pour attendre !)