Primitives et Intégrales

(Calculatrices conseillées !)

EXERCICE I [8 points]

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$
   a. Déterminer les nombres réels *a, b, c*, tels que l'on ait pour tout $x > 1$:
   $$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$$
   b. Trouver une primitive G de *g* sur l'intervalle]1 ; +∞[.
2. Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle]1 ; +∞[
3. Soit *h* la fonction définie par $h(x) = f(x).\ln x$ sur l'intervalle]1 ; +∞[
   a. Démontrer la relation suivante : $h(x) = (F(x).\ln x)' + g(x)$
   b. En déduire une primitive H de *h* sur l'intervalle]1 ; +∞[
   c. Calculer $I=\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x.dx$
   d. Donner le résultat exact sous la forme
   $$p.\ln 2 + q.\ln 3$$
   où *p* et *q* sont deux nombres Rationnels que l'on déterminera.

EXERCICE II [6 points]

1. Calculer les deux intégrales suivantes :
   $$A=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx \qquad \text{et} \qquad B=\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$
2. Déterminer trois nombres Réels a, b, c tels que pour tout nombre Réel positif ou nul on ait : $\dfrac{1}{(1+t)^2}=a+\dfrac{bt}{1+t}+\dfrac{ct}{(1+t)^2}$
3. En posant $t = e^x$ dans l'égalité précédente calculer l'intégrale :
   $$I=\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$$

EXERCICE III [6 points]

Soit f l'application définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=x-4+\dfrac{\ln x}{4}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Calculer les limites de *f* aux bornes de l'intervalle]0 ; +∞[
   Justifier que C_f admet une asymptote et en donner une équation.
2. a. Etudier les variations de f sur l'intervalle]0 ; +∞[et dresser le tableau des variations.
   b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle [3 ; 4].
   c. Tracer C_f
3. Soit D le domaine limité par C_f l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.
   a. Calculer pour x > 0 la dérivée de la fonction $u : x \mapsto x\ln x$
   b. En utilisant le résultat précédent calculer l'aire du domaine D à l'aide d'un polynôme du second degré en α.