jml@ecole-alsacienne.org
2006-2007

4 octobre – Durée 2h45

Nombres Complexes

(Calculatrices conseillées !)

EXERCICE I [6 points]

1∞) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u}, \vec{v})$, on considère les 2 points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad \text{et} \qquad z_B = -\sqrt{3} + i$$

a. Placer les points A et B dans le plan complexe.
b. Déterminer le module et un argument de z_A et z_B .
c. Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique, et sous forme exponentielle.

2∞) On pose $z_P = \dfrac{z_B}{z_A}$

a. Déterminer le module et un argument de z_P .
b. Construire l'image P de z_P dans le plan complexe.
c. Ecrire z_P sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
d. En déduire les valeurs exactes de cos $\dfrac{7\pi}{12}$ et sin $\dfrac{7\pi}{12}$

3∞) Soit C l'image du point B dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$

a. Déterminer le module et un argument de l'affixe z_C du point C.
b. Montrer que $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

4∞) On pose : $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

a. Calculer le module et un argument de Z
b. En déduire que AB = AC.
c. Montrer que $\text{Arg}(Z) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et en déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE II [5 points]

1∞) Résoudre dans C l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$

2∞) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u}, \vec{v})$, unités graphique 1cm on considère les points A, B, C, et P d'affixes respectives

$$z_A = \frac{3}{2} + 6.i\ ,\ z_B = \frac{3}{2} - 6.i\ ,\ z_C = -3 - \frac{1}{4}i\ ,\quad z_P = 3 + 2.i\ ,$$

et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \dfrac{5}{2}.i$

Dans chacun des cas suivants on écrira d'abord les relations vectorielles pour en déduire les relations entre les affixes demandées :

a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.
b. Déterminer l'affixe z_R du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.
c. Déterminer l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
d. Placer les points P,Q,R,S.

3∞) On considère le quadrilatère PQRS.

a. Démontrer que c'est un parallélogramme.
b. Calculer le rapport $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
c. Justifier que les points P,Q,R,S appartiennent à un même cercle noté $\mathcal{C}$ dont on déterminera l'affixe du centre et le rayon.

4∞) La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

Nombres Complexes

(Calculatrices conseillées !)

EXERCICE III [5 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (Unité : 2 cm), α désigne un nombre réel de l'intervalle]-π ; π [. Pour tout α on définit le nombre comlexe

$$Z(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\alpha})^2$$

1∞) Calculer $(1 + e^{i\alpha})e^{-i\frac{\alpha}{2}}$

2∞) En déduire que le nombre complexe $(1 + e^{i\alpha})$ a pour argument $\frac{\alpha}{2}$

3∞) Calculer le module et un argument de Z(α)

4∞) Représenter dans le plan complexe $Z(\frac{\pi}{6})$

EXERCICE IV [4 points] **Q.C.M. avec Justification**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse ou/et pour absence de justification.

1∞) Dans le plan complexe, on donne les points A,B,C d'affixes respectives

-2 + 3i ; -3 – i ; 2,08 + 1,98 i

Indiquer si le triangle ABC est :

a. isocèle et non rectangle
b. rectangle et non isocèle
c. Rectangle et isocèle
d. Ni rectangle ni isocèle

2∞) A tout complexe de z ≠ 2 on associe le complexe z' = $\frac{z - 4i}{z + 2}$ indiquer si l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est

a. un cercle de rayon 1
b. une droite
c. une droite privée d'un point
d. un cercle privé d'un point

3∞) Les notations étant les mêmes qu'à la question 2°. Indiquer si l'ensemble des points d'affixe z tels que z' soit un nombre réel est :

a. un cercle
b. une droite
c. une droite privée d'un point
d. un cercle privé d'un point

4∞) Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe ***i***.

Indiquer quelle est l'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a. $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b. $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c. $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d. $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$