Calculs élémentaires dans les Nombres Complexes

(Calculatrices inutiles)

EXERCICE I [6 points]

1°) On considère 2 nombres complexes donnés sous forme algébrique :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 - i$$

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, et sous forme exponentielle.
c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ construire les points A et B d'affixes respective z_1 et z_2.

2°) On pose $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

a) Déterminer le module et un argument de z_3 .
b) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
c) Construire l'image P de z_3 dans le plan complexe.
d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

3°) Soit C l'image du point A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$

a) Déterminer le module et un argument de l'affixe z_4 du point C.
b) Montrer que $z_4 = -\sqrt{3} - i$.
c) Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_4 - z_2}{z_1 - z_2}$

4°) Soit $U = z_4 - z_2$ et $V = z_1 - z_2$

a) Montrer que $|U| = BC$ et que $|V| = BA$. En déduire que BC = BA.
b) Montrer que $\text{Arg}\left(\dfrac{U}{V}\right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et en déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE II [4 points] **Q.C.M. avec Justification**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse ou/et pour absence de justification.

$$\text{On pose } Z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1. La forme algébrique de Z^2 est :

A. $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ **D.** $(2+\sqrt{2}) + i(2-\sqrt{2})$

2. Z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A. $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **B.** $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ **C.** $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **D.** $4e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. Z s'écrit sous forme exponentielle :

A. $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$ **B.** $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ **C.** $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ **D.** $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$

4. Les nombres Réels $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les Cosinus et Sinus de :

A. $\frac{\pi}{8}$ **B.** $\frac{5\pi}{8}$ **C.** $\frac{7\pi}{8}$ **D.** $\frac{3\pi}{8}$

Calculs élémentaires dans les Nombres Complexes

(Calculatrices inutiles)

EXERCICE III [4 points]

On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

1°) Vérifier que 1, j, j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

2°) Calculer $(1 - j)(1 + j + j^2)$; en déduire que $1 + j + j^2 = 0$

3°) Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2 = 0$

4°) Calculer de même $1 + \overline{j} + \overline{j}^2$

EXERCICE IV [3 points]

Soit $z = x + iy = r\cdot e^{i\alpha}$.

1°) Résoudre l'équation $z^2 = 1 + i$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

2°) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

EXERCICE V [3 points]

À tout nombre complexe z non nul on associe, dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C d'affixes respectives $a = z$; $b = \overline{z}$; $c = \frac{z^2}{\overline{z}}$

On note r le module de z et α un argument de z.

1°) Exprimer en fonction de r et α le module et l'argument de b.

2°) Exprimer en fonction de r et α le module et l'argument de c.

3°) Comment faut-il choisir z pour que les trois points A, B, C soient distincts deux à deux.

Dans la suite de l'exercice on supposera cette condition réalisée.

4°) Montrer que les trois points A, B, C appartiennent à un même cercle de centre O.

5°) Montrer que AB = AC.

6°) Le point A étant supposé fixé, indiquer une construction géométrique des points B et C, et justifier la construction.