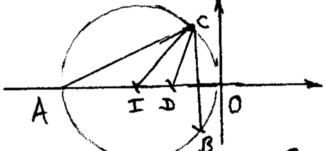
I. N° 124 p. 200 [TERRACHER T.S.]



$A \longleftrightarrow z_A = a = -2$

$B \longleftrightarrow z_B = b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

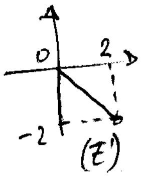
$C \longleftrightarrow z_C = c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

$D \longleftrightarrow z_D = d = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = \bar{b} \Rightarrow$ B et C sym/$\vec{Ox}$ donc le centre du cercle cherché est sur la MEDIATRICE de [BC] donc sur $\vec{Ox}$. De même le centre du cercle cherché est sur la MEDIATRICE de [AO] donc le centre I du cercle cherché est à l'intersection de ces deux médiatrices, i.e. au milieu de [AO] car $\vec{Ox} = (AO)$

1°) montrer que ABCO sont sur un même cercle à déterminer.

2°) $z' = \frac{a-c}{d-c} = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_D} = \frac{(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i) + 2}{-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i}{\frac{3}{10} + \frac{3}{5}i} = \frac{3+i}{\frac{1}{2}+i} = \frac{6+2i}{1+2i}$



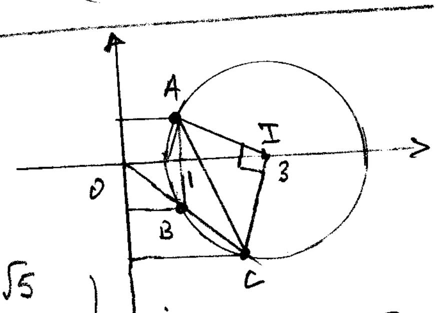
$\Leftrightarrow z' = \frac{(6+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{6-4i^2+2i-12i}{1-4i^2} = \frac{10-10i}{5} = \boxed{2-2i} = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $\frac{CA}{CD} = \frac{|a-c|}{|d-c|} = \left|\frac{a-c}{d-c}\right| = |z'| = 2\sqrt{2}$.

et $(\vec{CD}; \vec{CA}) = \text{Arg}(z') = -\frac{\pi}{4}$ et comme $(\vec{CO}; \vec{CA}) = -\frac{\pi}{2}$ (triangle rect. de diam AO)

on en déduit que (CD) est la bissectrice intérieure de $(\vec{CO}; \vec{CA})$. ■

II - N° 125 p. 200



$A \longleftrightarrow z_A = 1 + i$

$B \longleftrightarrow z_B = \bar{z}_A = 1 - i$ } $B = \text{Sym}_{/\vec{Ox}}(A)$

$C \longleftrightarrow z_C = 2 z_B = 2 - 2i$

$I \longleftrightarrow z_I = 3$

1°) $IA = \|\vec{IA}\| = |z_A - z_I| = |1+i-3| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$IB = IA$ par symétrie/$\vec{Ox}$ (médiatrice de [AB]).

$IC = |z_C - z_I| = |2-2i-3| = |-1-2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$IA = IB = IC = \sqrt{5}$ CQFD.

2°) $\frac{z_C - 3}{z_A - 3} = \frac{z_C - z_I}{z_A - z_I} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2)^2 - i^2} = \frac{2+2i^2+4i+i}{4+1} = \frac{5i}{5} = \boxed{i}$

Donc $\left|\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}\right| = |i| = 1 \Leftrightarrow \frac{IC}{IA} = 1 \Leftrightarrow \boxed{IA = IC}$ (déjà vu en 1°)

$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}\right) = \text{Arg}(i) = +\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\vec{IA}; \vec{IC}) = \boxed{+\frac{\pi}{2}}$

} $\widehat{AIC}$ Rectangle ISOCÈLE en I

3°) $E = t_{2\vec{IC}}(O) \Leftrightarrow \vec{OE} = 2\vec{IC} \Leftrightarrow z_E = 2(z_C - z_I) = 2(-1-2i) = \boxed{-2-4i}$

$D = r_{[O; \frac{\pi}{2}]}(E) \Leftrightarrow z_D = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z_E = i z_E = i(-2-4i) = \boxed{4-2i}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \times (-2) + (-2) \times 0 = 0$ (Repère orthonormé)

Donc $\vec{AB} \perp \vec{CD}$

Autre méthode : $(\vec{AB}; \vec{CD}) = \text{Arg}\left[\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right] = \text{Arg}\left[\frac{2}{-2i}\right] = \text{Arg}\left(\frac{-1}{i}\right) = \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ CQFD ■

III – N° 126 p. 200.

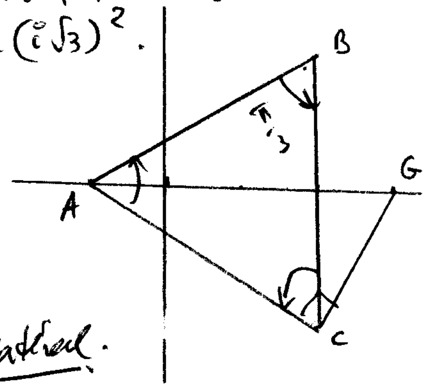
1°) $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

a) $P(-1) = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$ donc le polynôme est DIVISIBLE par $(z-(-1)) = z+1$.
$\Leftrightarrow$ il existe $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = (z+1)(z^2+az+b)$.

b) Par identification ou division euclidienne on trouve $a = -4$ et $b = 7$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-4z+7) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z^2 - 4z + 7 = 0$ (*).

(*) $z = 2 + i\sqrt{3}$ ou $z = 2 - i\sqrt{3}$ car $\Delta' = 4 - 7 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.



2°) $A \longleftrightarrow z_A = -1$
$B \longleftrightarrow z_B = 2 + i\sqrt{3}$
$C \longleftrightarrow z_C = 2 - i\sqrt{3}$ } CONJUGUÉS $\Leftrightarrow$ B et C Sym/$\overline{Ox}$.
$G \longleftrightarrow z_G = 3$.

b) $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$
$CA = \|\overrightarrow{AC}\| = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AB = BC = CA$ donc ABC Équilatéral.

c) $Z_1 = \dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1 - 3i^2} = \dfrac{4i\sqrt{3}}{4} = \boxed{i\sqrt{3}}$.

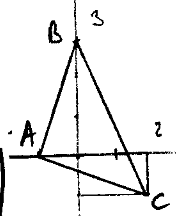
$\text{Arg}(Z_1) = (\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CA})$ et $|Z_1| = \dfrac{CA}{CG}$ (Théorème du cours)

Donc $(\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CA}) = +\frac{\pi}{2}$ et $\dfrac{CA}{CG} = \sqrt{3}$

Donc $G\hat{C}A$ Rectangle en C (NON ISOCÈLE).

IV N° 128 p. 201 $z' = i\left(\dfrac{z - 3i}{z+1}\right)$ $f: \begin{cases} P \longrightarrow P \\ M_{(z)} \longmapsto M'_{(z')} \end{cases}$ $(z \neq -1) \Leftrightarrow M \neq A$.

$z_A = -1$
$z_B = 3i$ $z_C = 2 - i$.



$f(D) = C \Leftrightarrow z_C = i\left(\dfrac{z_D - 3i}{z_D + 1}\right) \Leftrightarrow 2 - i = \dfrac{iz_D + 3}{z_D + 1} \Leftrightarrow (2-i)(z_D + 1) = iz_D + 3$

$\Leftrightarrow (2 - 2i)z_D = 3 - (2 - i) = 1 + i \Leftrightarrow z_D = \dfrac{1+i}{2-2i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2i}{2} = \boxed{\frac{1}{2}i}$

2°) Pour déterminer la nature du triangle ABC on peut calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = Z_1$

$Z_1 = \dfrac{3i+1}{3-i} = \dfrac{(3i+1)(3+i)}{3^2 - i^2} = \dfrac{1}{10}(10i) = \boxed{i}$ Donc $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \text{Arg}(Z_1) = +\frac{\pi}{2}$

$\dfrac{CB}{CA} = |Z_1| = 1$

Donc $A\hat{B}C$ est Rectangle et isocèle en A.

3°) $M \neq A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \neq \vec{0}$
$M \neq B \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \neq \vec{0}$) conditions Nécessaires pour que l'on puisse définir l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.

$OM' = \|\overrightarrow{OM'}\| = |z'| = \left|i \cdot \dfrac{z - 3i}{z+1}\right| = |i| \times \left|\dfrac{z - 3i}{z - (-1)}\right| = 1 \times \dfrac{|z - 3i|}{|z - (-1)|} = \dfrac{\|\overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{MA}\|} = \dfrac{MB}{MA}$.

De même : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \text{Arg}(z') \equiv \text{Arg}(i) + \text{Arg}\left(\dfrac{z-3i}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ $[2\pi]$.

4°) $M' \in \Gamma(O; R = 1) \Leftrightarrow OM' = R = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in (\Delta)$

a) (E) médiatrice de [AB].

b) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Arg}(z') = 0$ modulo π $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[\pi]$ $\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

donc $M\hat{A}B$ rectangle en M ($M \neq A$ et $M \neq B$) donc l'ensemble (F) cherché est le CERCLE de diamètre [AB] PRIVÉ de A et de B..

NB : O n'a pas d'argument !.