Calculatrices inutiles

EXERCICE I [5 points]

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$.
Écrire z_D sous forme algébrique, puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

EXERCICE II [6 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : 1 cm). Soient les nombres complexes :

$$a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) \text{ et } z_0 = 6 + 6i \text{ d'image } A_0.$$

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

Partie A

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.

Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

3. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

Partie B

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

2. En déduire que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leqslant 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$.

Calculatrices inutiles

EXERCICE III [Q.C.M. **avec Justification** 4 points]

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ~~ne~~ demande ~~pas~~ de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2{,}08+1{,}98\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

a. isocèle et non rectangle ; **b.** rectangle et non isocèle ;
c. rectangle et isocèle ; **d.** ni rectangle ni isocèle.

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :
a. un cercle de rayon 1 ; **b.** une droite ;
c. une droite privée d'un point ; **d.** un cercle privé d'un point.

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question **2.**
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
a. un cercle ; **b.** une droite ;
c. une droite privée d'un point ; **d.** un cercle privé d'un point.

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

a. $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$; **b.** $z' = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$;

c. $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$; **d.** $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

EXERCICE IV [5 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; (unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On pose $\mathrm{j} = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. a. Vérifier que 1, j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.
b. Calculer $(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)$; en déduire que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.
c. Vérifier que $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{j}^2 = 0$.

2. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.

a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si :

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$.

3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M′ d'affixes respectives 1, z et $\bar{z}$.
a. Pour quelles valeurs de z les points M et M′ sont-ils distincts ?
b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM′ soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.