53 Un résultat utilisé en probabilité

Partie A. Étude de $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$.

2. Montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante positive (sans calculer I_n).

3. En utilisant les questions précédentes, prouver que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1$.

En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. On pose $t_n = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n$.

a. Montrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.

b. En déduire que $t_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.

5. On pose $v_n = n\mathrm{I}_n^2$.

a. En écrivant v_n sous la forme $\dfrac{n}{n+1}\, t_n \,\dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n+1}}$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, \mathrm{I}_n$.

Partie B. Encadrement de $\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $u > -n$, $\ln\left(1 + \dfrac{u}{n}\right) \leqslant \dfrac{u}{n}$.

En déduire que pour tout réel $u > -n$, $\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^u$.

2. Montrer que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;\sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}\,; \quad \text{puis que}$$

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

3. En déduire alors l'encadrement suivant :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \, \mathrm{d}t.$$

Partie C. Autre expression de $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t$

Soit F une primitive de $t \mapsto \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ sur $[0\,;\sqrt{n}]$.

On pose $\varphi : \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$u \mapsto \sqrt{n}\sin u$.

1. Exprimer $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t$ à l'aide de F.

2. Montrer que $\mathrm{F} \circ \varphi$ est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et c
ler sa dérivée.

3. En déduire que $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} u \, \mathrm{d}u = \mathrm{F}(\sqrt{n}) - \mathrm{F}(0)$.

4. Prouver alors que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\, \mathrm{I}_{n+1}$.

Partie D. Majoration de $\int_0^{\sqrt{n}} \dfrac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \, \mathrm{d}t$ si $n \geqslant 2$

Soit G une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$ sur $[0\,;\sqrt{n}]$.

On pose $\theta : \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$

$u \mapsto \sqrt{n}\tan u$.

1. Exprimer $\int_0^{\sqrt{n}} \dfrac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \, \mathrm{d}t$ à l'aide de G.

2. Montrer que $\mathrm{G} \circ \theta$ est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire que $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} u \, \mathrm{d}u = \mathrm{G}(\sqrt{n}) - \mathrm{G}(0)$.

4. Prouver alors que $\cancel{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$ $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n/2}}$ $\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, \mathrm{I}_{n-2}$.

Partie E. Détermination de $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$

1. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2}$.

2. Démontrer que $\left(\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

POINT INFO

On note alors $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ cette limite. Ce réel représente l'aire comprise entre l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la courbe $y = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ (voir la figure p. 184).

On notera $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ l'aire hachurée ; le graphe étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$