22 La formule de Wallis

Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad$ **(1)**.

Piste *Poser* $u(x) = \sin^{n-1}x$ *et* $v'(x) = \sin x$ ...

3) En déduire I_2, I_3, I_4 et I_5.

4) Démontrer par récurrence que :

a) pour $n \geqslant 1$, $I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2}$;

b) pour $n \geqslant 1$,

$$I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}.$$

5) a) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\sin^n x$ et $\sin^{n+1}x$.

En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

b) À l'aide de l'égalité **(1)**, établir alors l'encadrement :

$$\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}, \text{ pour } n \geqslant 1.$$

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

6) Démontrer la formule de Wallis (mathématicien anglais, 1616-1703) : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$, avec, pour $n \geqslant 1$:

$$w_n = \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2n+1}.$$

7) En remarquant que $w_{n+1} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} w_n$, organiser sur un tableur le calcul des valeurs de w_n jusqu'à obtenir une valeur approchée de $\frac{\pi}{2}$ à 10^{-2} près. La convergence semble-t-elle rapide ?

24 Somme des inverses des carrés

Le but de ce problème est d'étudier la limite de la suite de terme général : $\quad u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad (n \geqslant 1)$.

A) Expression de u_n à l'aide d'une intégrale

1) Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \mathrm{d}t$.

2) On pose, pour tout $k \geqslant 1$: $K = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos kt \, \mathrm{d}t$.

À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $K = \frac{1}{k^2}$.

3) On pose, pour tout t de $[0, \pi]$ et $n \geqslant 1$:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt).$$

Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$u_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

B) Étude de l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t) \, \mathrm{d}t$

1) a) Vérifier que, pour tous réels a et b :

$$2 \sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$ et $t \in]0, \pi]$:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}. \quad (1)$$

c) On considère la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(0) = -1$ et, si $t \neq 0$, $g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$.

Montrer que g est continue en 0.

Rappel : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, \mathrm{d}t.$$

2) a) On pose, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $h'(x)$ est du signe de $\varphi(x) = x - \tan x$.

b) Étudier le signe de $\varphi(x)$ en étudiant les variations de φ.

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

d) Pour $t \in [0, \pi]$, démontrer l'encadrement :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant g(t) \leqslant -\frac{1}{2}.$$

3) a) On pose, pour $n \geqslant 1$: $A_n = \int_0^{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, \mathrm{d}t$.

Calculer A_n.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$: $-\frac{\pi}{2} A_n \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2} A_n$.

En déduire la limite de la suite (I_n).