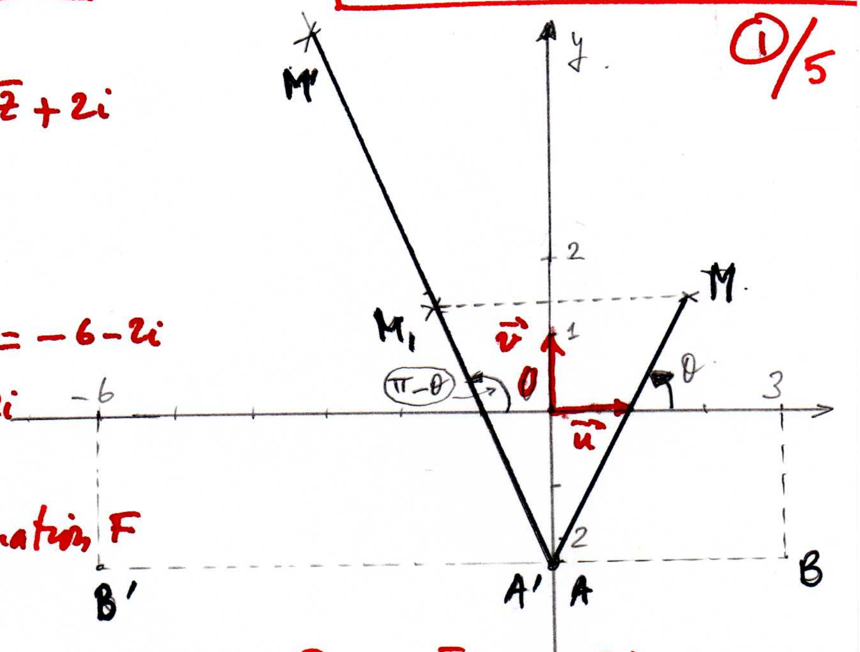
[BAC Blanc / Lycée Montchapet / DIJON]



$A(-2i)$, $B(3-2i)$, $M(z)$, $M'(z')$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' = -2\bar{z} + 2i \end{cases} \qquad F : \begin{cases} M \longrightarrow M' \\ P \longrightarrow P \end{cases}$$




1°) $\begin{cases} b' = -2\bar{b} + 2i = -2(3+2i) + 2i = -6-2i \\ a' = -2\bar{a} + 2i = -2(2i) + 2i = -2i \end{cases}$

Donc $a' = a \iff A' = A$.

$\iff$ A pt fixe de la transformation F

$(F(A) = A)$.

2°) $M \in (\Delta)$ $(y = -2) \iff z = x - 2i$ avec $x \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = x + 2i$

Alors $z' = -2(x+2i) + 2i = -2x - 2i \iff M'(-2x; -2) \Rightarrow M' \in (\Delta)$.

3°) $|z'+2i| = |-2\bar{z} + 4i| = 2|-\bar{z} + 2i| = 2|\bar{z} - 2i| = 2|\overline{z+2i}| = 2|z+2i|$

(en effet qq soit $Z_1$ on a $|Z_1| = |-Z_1| = |\overline{Z_1}|$ et $|\lambda Z_1| = |\lambda| . |Z_1|$.

(lois des modules dans les nombres complexes).

• $|z' + 2i| = \|\overrightarrow{AM'}\| = AM'$ et $|z+2i| = \|\overrightarrow{AM}\| = AM$. | d'où $\boxed{AM' = 2AM}$

4°) Soit $\theta = \text{Arg}.(z+2i) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{AM})$ $[2\pi]$. ($M \neq A$ sinon $\text{Arg}(z+2i) = \text{Arg}(0)$ N'EXISTE PAS)

a) car $z + 2i = z_M - z_A = z_{\overrightarrow{AM}}$.

b) $(z+2i)(z'+2i) = (z+2i)(-2\bar{z}+4i) = (-2)(z+2i)(\bar{z}-2i)$

$= (-2)(z+2i)(\overline{z+2i}) = (-2)|z+2i|^2 < 0$.

[Rappel : $z . \bar{z} = |z|^2$]

c) $\text{Arg}[(z+2i).(z'+2i)] \equiv \pi$ $[2\pi]$. $\Rightarrow \boxed{\text{Arg}(z'+2i) \equiv \pi - \theta \ [2\pi]}$

$\text{Arg}(z+2i) + \text{Arg}(z'+2i) \equiv \pi$ $[2\pi]$

$\text{Arg}(z+2i) + \text{Arg}(z'+2i) \equiv \pi$ $[2\pi]$

d) On en déduit que $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) \equiv \pi$ $[2\pi]$

d'où $\dfrac{(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'})}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$, c'est à dire que

la BISSECTRICE de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'})$ est $(Oy)$

donc les Demi Dr. $[AM)$ et $[AM')$ sont SYMÉTRIQUES par rapport à $(Oy)$.

5°) La suite la transformation F est la SYMÉTRIE d'AXE $(Oy)$

COMPOSÉE avec l'HOMOTHÉTIE de centre A et de rapport 2 :

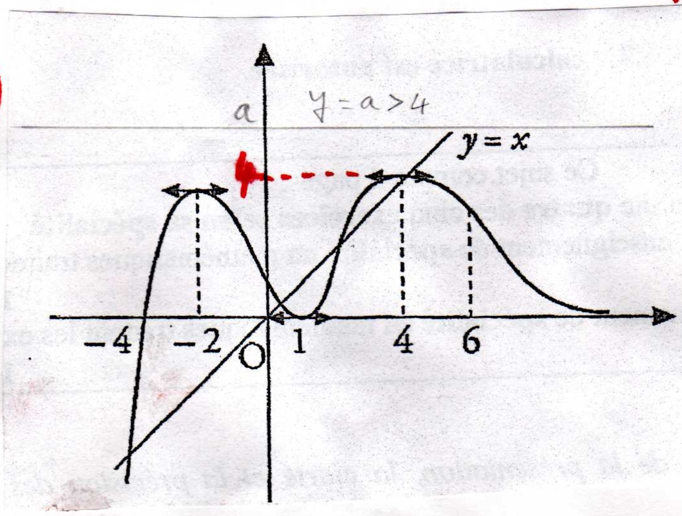
$M \xrightarrow{S/(Oy)} M_1 \xrightarrow{h[O;2]} M'$ car $\begin{cases} \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM_1} \\ AM_1 = AM \end{cases}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM_1})$

$= \pi - \theta$.

$F = h \circ S$.

# Exercice N°2 (VRAI / FAUX)

I
- f définie et dérivable sur $[-4;+\infty[$
- $f(x) > 0$ sur $[3;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ (Asymptote (Ox))




a) $f'(x)=0$ admet au moins 3 sol sur $[-4;+\infty[$ :: <u>VRAI</u>

car $f'(-2)=f'(1)=f'(4)=0$.

b) $\{x\in[-4;6] ;\ f(x)>x\}$ est un intervalle :: <u>FAUX</u>

car $(\Delta)(y=x)$ coupe $(\mathcal{C}_f)$ en 4 points d'abscisses $\alpha;\beta;\gamma;\delta=4$ donc

$f(x)>x \iff x\in\,]\alpha;\beta[\,\cup\,]\gamma;4[$.

c) Pour tout $a\geq 0$, $f(x)=a$ admet au moins une solution dans $[-4;6]$

<u>FAUX</u> car pour $a>4$ la droite d'équation $y=a$ ne coupe pas $(\mathcal{C}_f)$.

II - $\boxed{f(x)=xe^{-x}}$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = \boxed{e^{-x}(1-x)}$

| $x$ | $-\infty$    $1$    $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$    $0$    $-$ |
| $f$ | $\nearrow$   $\frac{1}{e}$   $\searrow$ |

a) $f'(x)+f(x)=e^{-x}$ <u>VRAI</u> pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)\leq 1$ <u>VRAI</u> pour tout $x\in\mathbb{R}$ car $f(1)=\frac{1}{e}$ est un maximum et $\frac{1}{e}<1$.

c) $f'(x) = e^{-x} + (-x)e^{(-x)} \longrightarrow 0$ qd $x\to+\infty$. <u>VRAI</u>.

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0^+$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0^-$ (Th de comp.)

---

# Exercice N°3 $\boxed{A}$ (R.O.C)

<u>Rappel</u> $\mathrm{Exp}'(x)=\mathrm{Exp}(x)$

1°) <u>Par définition</u> h dérivable en a et a pour Nb dérivé $\alpha$ $\iff \lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}=\alpha$.

2°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Exp}(x)-\mathrm{Exp}(0)}{x-0} = \mathrm{Exp}'(0) = e^0 = 1$

<u>CQFD</u>.

1°) $\boxed{h(x)=2xe^{2x}+1} \Rightarrow h'(x)=2e^{2x}+2x\times 2e^{2x}+0=2e^{2x}+4xe^{2x}$.

Par suite : $h'(x)-2h(x)=2e^{2x}+4xe^{2x}-2(2xe^{2x}+1)=2(e^{2x}-1)$.

Donc on a bien $h'-2h=2(e^{2x}-1)$ i.e. h sol de (E).

2°) $\boxed{y=z+h}$ y sol de (E) $\iff y'-2y=2(e^{2x}-1)$

et h sol de (E) $\iff h'-2h=2(e^{2x}-1)$

$\iff (z+h)'-2(z+h)=2(e^{2x}-1)$

$\iff (z'-2z)+(h'-2h)=2(e^{2x}-1)$

$\iff z'-2z=0$ (H).

(H) admet pour solutions $\boxed{z=Ce^{2x}}$ avec C const$^{te}$ $\in\mathbb{R}$

Donc $y=Ce^{2x}+2xe^{2x}+1$ et $y(0)=0 \iff 0=C+1 \iff C=-1$

d'où $\boxed{y=e^{2x}(2x-1)+1}=g(x)$.

[C] Etude de la fonction g : g sol de (E) donc

$g'-2g=2(e^{2x}-1) \Rightarrow g'(x)=2\{[e^{2x}(2x-1)+1]+(e^{2x}-1)\}$.

$\Rightarrow \boxed{g'(x)=4xe^{2x}}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

- Donc sgn$[g'(x)]$ = sgn$[x]$ car $e^{2x}>0$ sur $\mathbb{R}$.
- D'après les variations de g on a $g(x)\geq 0$ sur $\mathbb{R}$. (g continue)

[D] Etude de la fonction : $\boxed{f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}}$ ($x\in\mathbb{R}^*$ ou $x\neq 0$)

1°) • $\lim_{-\infty} f=\lim_{-\infty} 2\left[\frac{e^{2x}}{2x}\right]-\lim_{-\infty}\frac{1}{x}=0^{(-)}-0^{(-)}=\boxed{0}$ car $\lim_{-\infty}\frac{e^X}{X}=0^-$

• $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 2\left[\frac{e^{2x}-1}{2x}\right]=2\lim_{2x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\times 1=\boxed{2}$ d'après [A]

• $\lim_{+\infty} f=2\lim_{+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}-\lim_{+\infty}\frac{1}{x}=+\infty-0=\boxed{+\infty}$ car $\lim_{+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

2°) ASYMPTOTE "HORIZONTALE" $\boxed{y=0}$ en $(-\infty)$ car $\lim_{-\infty} f=0$.

3°) $f'(x)=\frac{(2e^{2x})x-(e^{2x}-1)}{x^2}=\frac{e^{2x}(2x-1)+1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$.

III - [D] 3°) $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$

Donc $Sgn[f'(x)] = Sgn[g(x)]$ sur $\mathbb{R}^*$

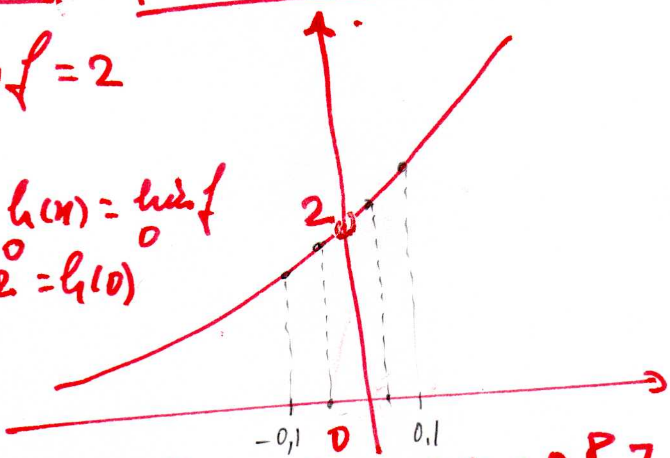
Donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$. $(x \neq 0)$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | \|\| | $+$ |
| $f$ | $0 \nearrow 2$ | \|\| | $2 \nearrow +\infty$ |

4°)

| $x$ | ... $-0,2$ | $-0,1$ | $-0,05$ | $0,05$ | $0,1$ | $0,2$ ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1,65$ | $1,81$ | $1,90$ | $2,10$ | $2,21$ | $2,46$ |

• $f$ non continue en $x_0 = 0$ mais $\lim\limits_{0} f = 2$
car $f$ NON DÉFINIE en $0$.




5°) $\begin{cases} h(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ h(0) = 2 \end{cases}$ || Donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{0} f = 2 = h(0)$

$h$ est donc un PROLONGEMENT de $f$ PAR CONTINUITÉ en 2.

[HORS PROGRAMME ?]

• Pour montrer que $h$ est DÉRIVABLE en 0 il faut calculer directement $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x} = \lim\limits_{0} \dfrac{f(x) - 2}{x}$

Or $\dfrac{f(x)-2}{x} = \dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$ Pour lever l'indétermination qd $x \to 0$ il faut utiliser la propriété suivante : $e^X = 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + X^2 \varepsilon(X)$ (développement limité de Exp. en 0).

avec $\varepsilon(X) \to 0$ qd $X \to 0$

On aurait alors $\dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = \dfrac{1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + 4x^2 \varepsilon(2x) - 1 - 2x}{x^2}$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 4x^2 \varepsilon(2x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} [2 + 4\varepsilon(2x)] = 2$

Ainsi obtiendrait-on $h'(0) = 2$.

D'après le tableau des valeurs on sait que

$h'(0)$ à droite $\simeq \dfrac{f(0,05) - h(0)}{0,05 - 0} \simeq \dfrac{2,10 - 2}{0,05} = \dfrac{0,10}{0,05} = \boxed{2}$ (à droite).

et $h'(0)$ à gauche $\simeq \dfrac{h(-0,05) - h(0)}{-0,05 - 0} \simeq \dfrac{1,90 - 2}{-0,05} = \dfrac{-0,10}{-0,05} = \boxed{2}$ à gauche.

Ainsi pouvait-on conjecturer que $\boxed{h'(0) = 2}$.

V. SUITES NUMERIQUES REC$^{tes}$ | TS$_5$ - D6 - Fév 06 5/5

(EXO / NON spécialistes).

$$\boxed{f(x) = \frac{x-12}{x-7}} = \frac{x-7-5}{x-7} = 1 - \frac{5}{x-7} \Rightarrow f'(x) = \frac{+5}{(x-7)^2} \ (x \neq 7).$$

Donc $f \nearrow$ sur $[2;6] = I$ donc $2 \leq x \leq 6 \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(6)$

or $f(2) = \frac{-10}{-5} = 2$ et $f(6) = \frac{-6}{-1} = 6 \implies 2 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow f(x) \in I$.

- $f(2) = 2$ et $f(6) = 6$ Indique que $f$ admet 2 pts fixes : 2 et 6.

c'est à dire que la courbe de $f$ coupe la 1$^{ère}$ bissectrice en 2 pts.

2°) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 12}{u_n - 7} = f(u_n) \\ u_0 = 5 \end{cases}$ | qq soit $n$ on a $u_n \in I$
en effet soit $(H_n)$ : $u_n \in I$

i) INIT : $(H_0)$ vrai car $u_0 = 5 \in I$

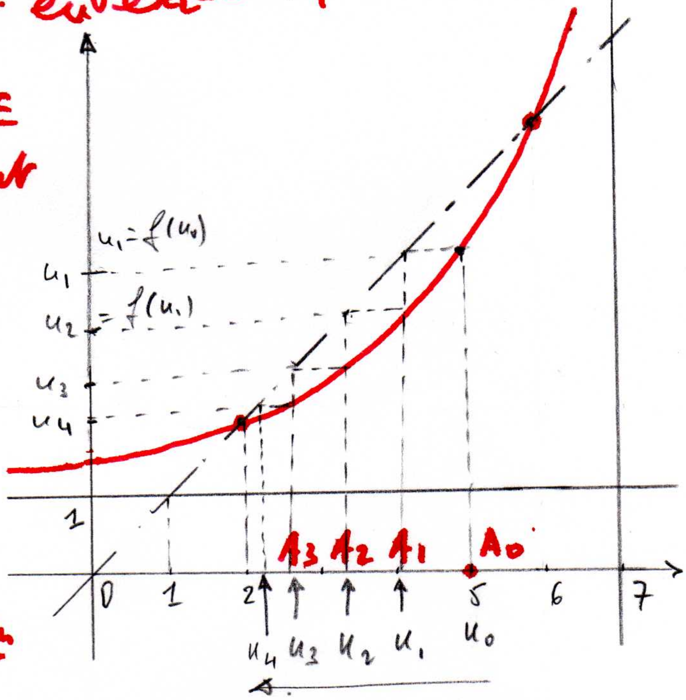
ii) HEREDITE : $(H_n) \Rightarrow u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in I \Rightarrow u_{n+1} \in I \Rightarrow (H_{n+1})$
d'après 1°)

iii) CONCLUSION $(H_n)$ vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ en vertu du principe de Récurrence

3°) $(\mathscr{C}_f)$ est une branche d'HYPERBOLE équilatère dont les asymptotes sont $x = 7$ et $y = 1$.

D'après la construction on peut conjecturer que $(u_n)$ est :

- bornée par 2 et 6
- décroissante
- convergente vers 2




4°) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 12}{u_n - 7} - u_n = \frac{u_n - 12 - u_n^2 + 7u_n}{u_n - 7}$

$= \frac{-u_n^2 + 8u_n - 12}{u_n - 7} = -\frac{(u_n-2)(u_n-6)}{u_n - 7}$ Donc le SIGNE de $u_{n+1} - u_n$ sur l'intervalle $I = [2;6]$.

est le signe du produit des trois binômes sur $u_{n+1} - u_n < 0 \iff (u_n) \searrow$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n$

5°) $(u_n)$ étant décroissante et minorée par 2 on peut dire (théorème de convergence monotone) que $(u_n)$ CONVERGE vers une limite $\ell \geq 2$ (et $\ell \leq 5$) or $f$ étant continue on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)$

d'où $\ell = f(\ell) \iff \ell$ est un POINT FIXE de $f$ et $2 \leq \ell \leq 5 \Rightarrow \boxed{\ell = 2}$

6°) $(u_n)$ CONSTANTE $\iff u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_1 = u_0 \Rightarrow (2-u_0)(u_0-6) = 0$

Donc $\boxed{u_0 = 2}$ ou $\boxed{u_0 = 6}$. (évident sur la figure).