[Lycée MONTCHAPPET, DIJON]

BAC BLANC – janvier 2006

Epreuve de MATHEMATIQUES

Série S

La calculatrice est autorisée.

Ce sujet compte 4 pages. Chaque élève traite **quatre** des cinq **exercices selon sa spécialité** : Les élèves qui **ne suivent pas** l'enseignement de **spécialité** en mathématiques traitent les exercices **1, 2, 3 et 5.** Les élèves qui **suivent** l'enseignement de **spécialité** en mathématiques traitent les exercices **1, 2, 3 et 4.**

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

__Exercice n°1__ (sur 5 points) *Commun à tous les candidats*

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique : 2cm.
On appelle A le point d'affixe $-2i$.
A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe :

$$z' = -2\bar{z} + 2i \quad \text{(où } \bar{z} \text{ désigne le conjugué de } z\text{).}$$

1°) On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.

2°) Montrer que si M appartient à la droite Δ d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à Δ.

3°) Démontrer que, pour tout point d'affixe z, $|z'+2i| = 2|z+2i|$; interpréter géométriquement cette égalité.

4°) Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z+2i$.

a) Montrer que θ est une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$.
b) Démontrer que : $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel négatif ou nul.
c) En déduire un argument de $z'+2i$ en fonction de θ.
d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

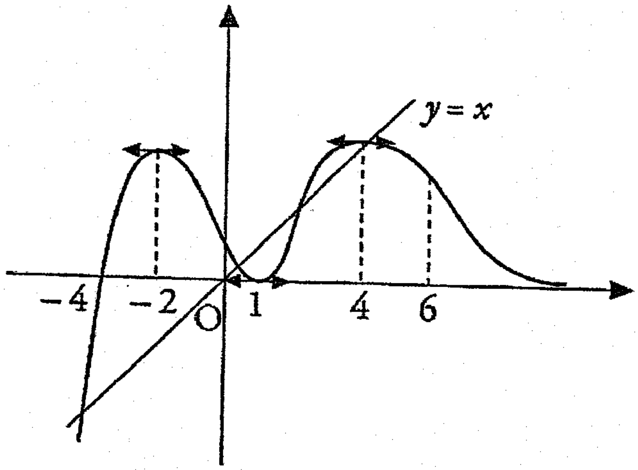
5°) En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

Exercice n°2 (sur 3 points) *Commun à tous les candidats*

Dans les deux situations suivantes, répondre par « Vrai » ou par « Faux » en justifiant votre réponse .

Situation 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-4;+\infty[$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



De plus on précise que, pour tout $x \in [3;+\infty[$, $f(x) > 0$ et que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

a) L'équation $f'(x) = 0$ admet au moins trois solutions sur $[-4;+\infty[$.

b) $\{x \in [-4;6], f(x) > x\}$ est un intervalle.

c) Pour tout $a \in [0;+\infty[$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution dans $[-4;6]$.

Situation 2

Soit f la fonction définie sur l »ensemble des réels par : $f(x) = xe^{-x}$.

a) Pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.

b) Pour tout réel x, $f(x) \leq 1$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

Exercice 3 (sur 7 points) *Commun à tous les candidats*

R désigne l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Cette question constitue une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que la fonction dérivée de la fonction $: x \mapsto e^x$ est la fonction $: x \mapsto e^x$.

Rappeler la définition du nombre dérivé d'une fonction k en un réel a.

A l'aide des rappels précédents, démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Partie B

On se propose de résoudre sur R l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$$

1°) Montrer que la fonction h définie sur R par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2°) On pose $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $z' - 2z = 0$.
Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3°) Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0, déterminer cette solution.

Partie C

On considère la fonction g définie sur R par : $g(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$

1°) Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variation (la recherche des limites en $-\infty$ et en $+\infty$ n'est pas demandée).

2°) Déduire le signe de g sur R.

Partie D

On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.

1°) Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$ (on pourra utiliser la partie A).

2°) En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.

3°) Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variation (on pourra utiliser la partie C).

4°) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec pour unités : 4 cm sur $(O; \vec{i})$ et 2 cm sur $(O; \vec{j})$. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,2	-0,1	-0,05	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$												

5°) Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h(x) = f(x) \ , x \neq 0 \\ h(0) = 2 \end{cases}$

Cette fonction est définie et continue sur R. En supposant que h est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $h'(0)$; faire cette lecture graphique. Quel résultat de limite peut-on ainsi conjecturer?

Exercice n°4 (sur 5 points) *pour les candidats* ***spécialistes*** *uniquement*

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ \text{pour tout entier } n, u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1°) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2°) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4).
En déduire que pour tout entier naturel k : $u_{2k} \equiv 2$ et $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4).

3°) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28$ (modulo 100).

4°) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5°) Démontrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice n°5 (sur 5 points) *pour les candidats* ***non spécialistes*** *uniquement*

Soit I l'intervalle $[2;6]$.

On considère la fonction f définie sur I par ; $f(x) = \dfrac{x-12}{x-7}$.

1°) Etudier les variations de f et en déduire que pour tout réel de I, $f(x)$ appartient à I.

2°) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 12}{u_n - 7} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à I.

3°) Dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), représenter graphiquement f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
Placer les points A_0 ; A_1, A_2, A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.
Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

4°) Etablir la relation : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2-u_n)(u_n-6)}{u_n - 7}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5°) Démontrer que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

6°) Pour quelles valeurs de u_0 la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est-elle constante ?