TS_1- TS_3 LYCÉE DURUY **Contrôle du 5/12/05** **3 heures**

I. Les questions sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $e^x - 6e^{-x} + 5 = 0$ b) $e^{3-x}.e^{2x-1} \leq (e^{5+x})^2$

2) Etudier la limite en 0 des fonctions a) $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ b) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ a) $(iz - 3 + i)((1-i)z + 4 + 3i) = 0$ b) $\dfrac{iz+1}{z-i} = 2$

4) On considère le plan complexe .

a) On donne $A(\frac{1}{2} - 3i)$, $B(-1)$ et $C(3+i)$. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

b) A tout point m d'affixe z, on associe le point M d'affixe Z définie par $Z = z^2 + i$. Déterminer l'ensemble des points m tels que M soit sur l'axe réel.

II. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $I =]-1;1[$ telle que : $f(0) = 0$ et pour $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Pour x élément de I on pose : $g(x) = f(x) + f(-x)$. Calculer $g'(x)$, puis montrer que la fonction f est impaire.

2) Calculer une valeur approchée de $f(0,5)$.

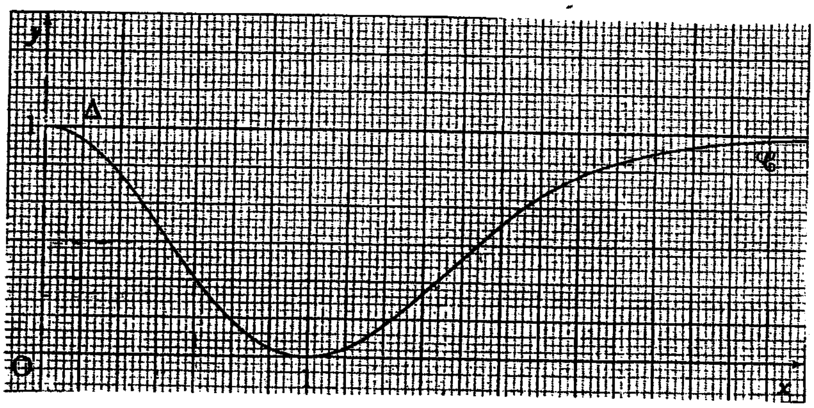
3) Montrer que la méthode d'Euler avec un pas de 0,05 permet de définir une suite de points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ tels que : pour $n \in \mathbb{N}$ $x_n = 0,05n$ et $y_{n+1} = y_n + \dfrac{0,05}{\sqrt{1 - 0,0025n^2}}$. En déduire une valeur approchée de $f(0,5)$ par cette méthode.

4) Pour x élément de I on pose : $F(x) = (f \circ \sin)(x) - x$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée F'. Déterminer F(x) pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

5) Déduire de la question précédente la valeur exacte de $f(0,5)$.

III. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$ par : $f(x) = 1 - x^2e^{1-x^2}$. Son tableau de variation et sa courbe représentative *C* avec son asymptote Δ sont tracées ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



Partie A- Lecture graphique

1) k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0 ;+\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.

2) n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions.

Partie B- Définition et étude de deux suites

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère l'équation : (E) $f(x) = \frac{1}{n}$.
   a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle [0 ; 1]. On note u_n cette solution . (on a donc $f(u_n) = \frac{1}{n}$).
   b) Sur le graphique, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n , pour n appartenant à l'ensemble {2 ; 3 ; 4 }.
   c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.
   d) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite. Déterminer l.
2) On définit de même l'unique solution de (E) sur l'intervalle [1 ;+∞[que l'on note v_n .Sur le graphique, construire sur l'axe des abscisses les réels v_n , pour n appartenant à l'ensemble {2 ; 3 ; 4 }.
   On admet que la suite (v_n) est décroissante. Justifier qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
3) Que peut-on dire des deux suites (u_n) et (v_n) ? Justifier.

IV. La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par $f(x) = (20x+10)e^{-\frac{x}{2}}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. (unités graphique : 1cm)

Partie A

1) Etudier la limite de la fonction f en +∞.
2) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α dans]0 ;+∞[et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
4) Tracer la courbe C.

Partie B

On note y(t) la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant t = 0 , est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ;+∞[associe y(t), est solution de l'équation différentielle : (E) $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{t}{2}}$.

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle [0 ;+∞[.
2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E) , définie sur l'intervalle [0 ;+∞[, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E) définie sur l'intervalle [0 ;+∞[vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction g – f est solution, sur l'intervalle [0 ;+∞[, de l'équation différentielle :
      (E') $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
   b) Résoudre l'équation (E').
   c) Conclure.
3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.