I - [Nelle Calédonie, 93] (ANNABAC NATHAN 2006 P.155.)

$\begin{cases} f_k(x) = xe^{-x} + kx \\ x > 0 \; ; \; k \in \mathbb{R}. \end{cases}$ $(\mathcal{C}_k)$.

1. Etude des fonctions f_k : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0 + \lim\limits_{x\to+\infty}(kx)$ $\begin{cases} = +\infty \text{ si } k>0 \\ = 0 \text{ si } k=0. \\ = -\infty \text{ si } k<0 \end{cases}$

a) [en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ car [Th. de comp°] $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

(D_k) $y = kx$ asymptote à $\mathcal{C}_k \iff \lim\limits_{x\to+\infty}[f_k(x) - kx] = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0^{(+)}$.

Donc (D_k) asymptote à $\mathcal{C}_k$ en $+\infty$ et $(\mathcal{C}_k)$ au DESSUS de (D_k) en $+\infty$.

NB. (D_k) COUPE $\mathcal{C}_k$ en 0 car $f_k(x) - kx = 0 \iff xe^{-x} = 0 \iff x = 0$.

et pour $x<0$ $(\mathcal{C}_k)$ est en DESSOUS de (D_k).

b) $f'_k(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) + k = e^{-x}(1-x) + k$.

$f''_k(x) = (-e^{-x})(1-x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}[1-x+1] = e^{-x}(x-2)$.

x	0	1	2	$+\infty$
$f''_k(x)$		$-$	0	$+$
$f'_k(x)$	$1+k$	$\searrow$ k	m	$\nearrow$ k

$f'_k(2) = k - e^{-2} = m < k$ car $e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0$.

Donc si $k \geq e^{-2}$ alors $f'_k(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

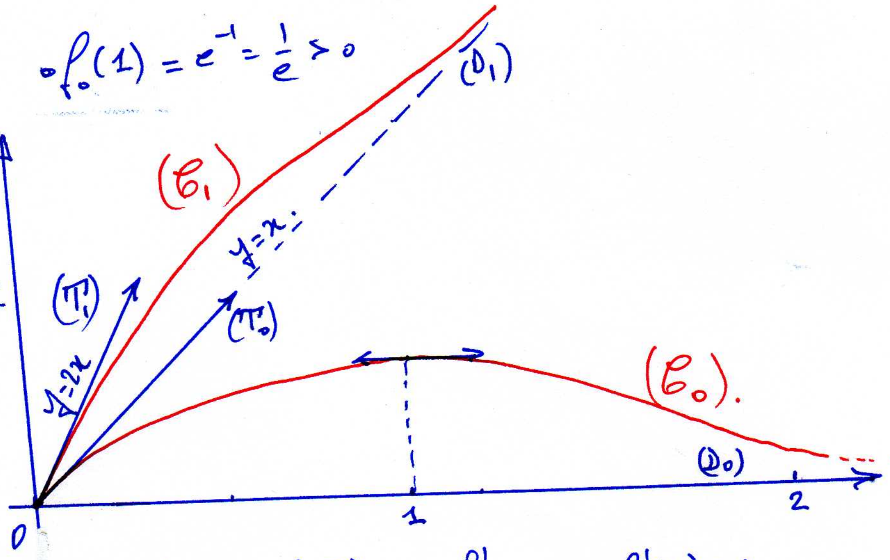
$\lim\limits_{x\to+\infty} f'_k(x) = k$ car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} xe^{-x} = 0. \end{cases}$

2) $\boxed{k=0}$. $f_0(x) = xe^{-x}$

$f'_0(x) = e^{-x}(1-x)$

• $f_0(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'_0(x)$	1 $+$	0	$-$
f_0	0 $\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$ 0



$\boxed{k=1}$. • $f_1(x) = xe^{-x} + x$

• $f'_1(x) = e^{-x}(1-x) + 1$

• $f''_1(x) = e^{-x}(x-2)$

• $f'_1(2) = m = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	2	$+$	
f_1	0	$\nearrow$ $1+\frac{1}{e}$	$\nearrow$ $+\infty$

• Equation de (T_0) : $f_0(0) = 0$ $f'_0(0) = 1$ $\Rightarrow \boxed{y = x}$.

• Equation de (T_1) : $f_1(0) = 0$ $f'_1(0) = 2$ $\Rightarrow \boxed{y = 2x}$.

• Asymptote à $(\mathcal{C}_0)$: $y = 0$. (Axe (Ox)).

• Asymptote à $(\mathcal{C}_1)$: $y = x$. (1ère bissectrice) (T_0).

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t} & \boxed{t>0} \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

1° a) g CONTINUE en 0 $\overset{(\text{déf.})}{\iff}$ $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = g(0).}$

or $\lim_{t\to 0} \frac{1-e^{-t}}{t} = \lim_{(-t)\to 0} \frac{e^{(-t)}-1}{(-t)} = 1$ (DÉRIVÉE de EXP en 0)

Donc g continue en 0 (à droite et à gauche)

1° b) $\boxed{\lim_{t\to +\infty} g(t) = 0}$ car : $\lim_{+\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{1}{t} = 0$.

2° a) $g'(t) = \dfrac{te^{-t} - (1-e^{-t})}{t^2} = \boxed{\dfrac{(1+t)e^{-t}-1}{t^2}} = \dfrac{(1+t)-e^{t}}{t^2.e^{t}}$ $\boxed{t>0}$. Donc Sgn $g'(t)$ = Sgn $[(1+t)-e^t]$.

Soit $u(t) = 1+t-e^t \Rightarrow u'(t) = 1-e^t < 0$ sur $[0;+\infty[$ car EXP ↗ sur $\mathbb{R}$.

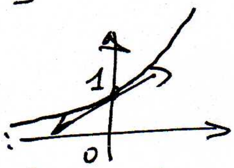
t	0	$+\infty$
$u'(t)$	$-$	
u	0 ↘	

donc $t>0 \iff e^t > e^0 = 1 \iff 1-e^t < 0$.

D'après le tableau de variations : u ↘ et $u(0)=0$

donc $u(t) < 0$ sur $[0;+\infty[$.

i.e $\boxed{1+t<e^t}$



(NB : on sait que $y = 1+t$ est l'équation de la tangente à l'EXP en 0 : et on a ainsi (re)démontré que la courbe de l'EXP est au dessus de la tangente à l'origine sur $[0;+\infty[$ (sur $]-\infty;0]$ aussi ...).

Par suite $g'(t) \leq 0$ sur $[0;+\infty[$. donc g ↘ sur $[0;+\infty[$.

et comme $g(0) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0^+$ [alors $g(t) > 0$ sur $[0;+\infty[$].

t	0	$+\infty$
$g'(t)$	? $-$	
g	1 ↘	0

• dérivabilité de g en 0 ?

on doit chercher la limite en $0^{(+)}$ du taux :

$\dfrac{g(t)-g(0)}{t}$ lorsque $t \to 0^+$.

$\dfrac{g(t)-g(0)}{t} = \dfrac{\frac{1-e^{-t}}{t} - 1}{t} = \dfrac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. INDÉT. en 0 . à lever ...

3°) on pose $W(t) = h(t) - \frac{t^3}{6} = 1-t+\frac{t^2}{2} - e^{-t} - \frac{t^3}{6}$

$W'(t) = h'(t) - \frac{t^2}{2} = -1+t+e^{-t} - \frac{t^2}{2}$

$W''(t) = 1-e^{-t}-t$

$W'''(t) = e^{-t} - 1 = \frac{1-e^t}{e^t}$

t	0	$+\infty$
$W'''(t)$	0	$-$
$W''(t)$	0 ↘	$-$
$W'(t)$	0 ↘	$-$
$W(t)$	0 ↘	$-$

Le tableau des variations ci-contre montre que $W(t) \leq 0$ sur $[0;+\infty[$.

donc $h(t) \leq \frac{t^3}{6}$ sur $[0;+\infty[$.

• on montrerait de même que $h(t) \geq 0$ donc $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{g(t)-g(0)}{t} = \dfrac{h(t)-\frac{t^2}{2}}{t^2} = \dfrac{h(t)}{t^2} - \dfrac{1}{2}$ avec $0 \leq \dfrac{h(t)}{t^2} \leq \dfrac{t}{6}$. Donc $\lim_{t\to 0} \dfrac{h(t)}{t^2} = 0$ (gendarmes). et ensuite $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

III - [AMIENS, 1982] $\boxed{\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}$ ($x \neq 0$) | TSS - Co/D3/15.11.05 (3)/3

ANNALES BAC NATHAN ~~2006~~ p.157

$D\varphi =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Limites aux bornes de $D\varphi$:

- $\lim\limits_{-\infty \text{ (ou } +\infty)} \varphi(x) = \lim\limits_{X=\frac{1}{x}\to 0} (1+X)e^{X}+1 = (1+0)\times 1 + 1 = \boxed{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = \boxed{1}$ car $X = \frac{1}{x} \to -\infty$; $\varphi(x) = e^{X} + Xe^{X} + 1$. | $e^X \to 0^+$, $Xe^X \to 0^-$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \boxed{+\infty}$ car $X = \frac{1}{x} \to +\infty$; $e^X \to +\infty$, $Xe^X \to +\infty$.

La fonction φ n'est donc pas CONTINUE en 0. Si l'on pose $\varphi(0) = 1$, φ sera continue "à gauche" en 0 mais non à droite.

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \boxed{-\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^3}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
φ	2	↘	a	↗	1 ‖ $+\infty$	↘	2

$\varphi(-\frac{1}{2}) = a = 1 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}86 > 0$

D'après le tableau de variation $\varphi(x)$ est donc toujours POSITIF sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

[2]. $f : \begin{cases} x \neq 0 \longmapsto \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \\ 0 \longmapsto 0. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ car $\frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ car $\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to 0$.

Donc $\lim\limits_{0} f = 0 = f(0)$ donc f est CONTINUE (à droite et à gauche) en 0.

La DERIVABILITE de f en 0 dépend de l'existence de la limite en $0^\pm$ du taux d'accroissement de f à partir de 0 :

$T(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = 0^+ \text{ car } \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to +\infty. \\ \lim\limits_{x\to 0^-} T(x) = 1 \text{ car } \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to 0. \end{cases}$

Donc f N'EST PAS DERIVABLE en 0 (f est dérivable à droite et à gauche en 0, séparément. $(\mathcal{C}_f)$ présente donc un point ANGULEUX en 0)

b) pour $x \neq 0$ $f'(x) = \dfrac{(1+e^{\frac{1}{x}}) - x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{1/x})^2} = \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{1/x})^2} = \dfrac{\varphi(x)}{(1+e^{1/x})^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1 ‖ 0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$.

On pose $t = \frac{1}{x} \to 0$

(3) $\lim\limits_{\pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\right] = ?$

$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{t(1+e^t)} - \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{4}$ (INDET : $\infty - \infty$).

$= \dfrac{2-1-e^t}{2t(1+e^t)} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1-e^t}{2t(1+e^t)} + \dfrac{1}{4} = -\left[\dfrac{e^t-1}{t}\right] \times \dfrac{1}{2(1+e^t)} + \dfrac{1}{4}$

or $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\right]$

$= -1 \times \dfrac{1}{2(1+1)} + \dfrac{1}{4} = 0$ CQFD.