jml@ecole-alsacienne.org
2005-2006

14 mars – Durée 3h.

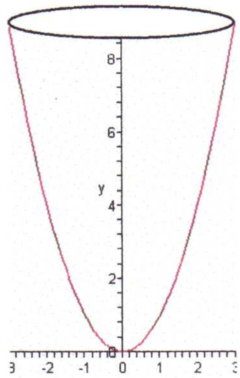
Intégrales et probabilités

(Calculatrices nécessaires)

I. Champagne on the R.O.C s …*[1,5pt]*

On considère une flûte à Champagne constituée par un paraboloïde de révolution engendré par rotation d'une parabole autour de l'axe Oz et d'équation $z = x^2$.

i. Calculer le volume du verre en fonction de sa hauteur h.
ii. Déterminer h de telle sorte qu'avec une bouteille de Champagne de 750 ml on puisse remplir 6 verres.(l'unité de volume choisie est le cm^3 et 1 ml = 1 cm^3).



II. En avoir ou pas … *[1,5pt]*

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7. L'expérience consiste à tirer simultanément 3 boules.

i. Combien de tirages différents peut-on ainsi obtenir ?
ii. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k , $k \in [3 ; 7]$?
iii. En <u>déduire</u> sans calcul, mais en justifiant le raisonnement, une expression de $\sum_{k=3}^{7}\binom{k-1}{2}$.

III. Plus généralement… *[1,5pt]*

On considère une Urne contenant n boules rouges et n boules blanches. On tire n boules simultanément.

i. Combien de tirages différents peut-on ainsi obtenir ? (on suppose que les boules sont marquées).
ii. Combien de tirages de n boules contiennent exactement k boules rouges (et n-k boules blanches).
iii. En <u>déduire</u> en justifiant le raisonnement que l'on a l'égalité suivante : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

IV. L'espérance de la loi binomiale revisitée …*[2pts]*

On considère la loi binomiale de paramètres *n, p,* et $q = 1 - p$.

i. Rappeler l'expression initiale de définition de l'espérance E[X] de cette loi.
ii. Développer selon la formule du binôme l'expression $f(x) = (px + q)^n$ pour tout *x* Réel.
iii. En déduire deux expressions distinctes de la dérivée $f'(x)$.
iv. Déduire de ce dernier résultat la formule $E[X] = np$.

Exercice II
[4 pts]

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
- 4 jetons blancs marqués 0
- 3 jetons rouges marqués 7
- 2 jetons blancs marqués 2
- 1 jeton rouge marqué 5

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les événements suivants :

A : « Les 4 numéros sont identiques ».
B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2 000 ».
C : « Tous les jetons sont blancs ».
D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a. Montrer que la probabilité de l'événement B est $\frac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des événements A, C, D, E.

c. On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

3. On établit la règle de jeu suivante :
- Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 €.
- Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 €.
- Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 €.
- Si le joueur peut former le nombre 0000, il perd 25 €.
- Pour tous les autres tirages, il perd 5 €.

G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

T.S.V.P

jml@ecole-alsacienne.org

Exercice III
[5 pts]

Pour analyser le fonctionnement d'une machine d'atelier, on note, mois après mois, ses pannes et on remarque que :

— sur un mois la machine tombe au plus une fois en panne ;

— si pendant le mois « m » la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant « $m+1$ » est 0,24 ;

— si la machine tombe en panne le mois « m » (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant « $m+1$ » est 0,04 ;

— la probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement : « La machine tombe en panne le $n^{\text{ième}}$ mois suivant sa mise en service » ; on note p_n la probabilité E_n (et on a ainsi $p_1 = 0{,}1$). Si A est un événement, $\overline{A}$ représentera l'événement contraire.

1° *a*) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant que E_n » et de « E_{n+1} sachant que $\overline{E}_n$ ».
Exprimer les probabilités de « E_{n+1} et E_n » et de « E_{n+1} et $\overline{E}_n$ » en fonction de p_n.

***b*)** Utiliser *a*) pour montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$p_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2\,p_n.$$

2° *a*) Résoudre l'équation $p = 0{,}24 - 0{,}2\,p$.

***b*)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - p$.
Calculer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire les expressions en fonction de n, de u_n et de p_n.

***c*)** Montrer que la suite (p_n) est convergente ; expliciter sa limite.

Exercice IV [3,5 pts]

On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela 60 % des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo(1), et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de taux pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.

On appelle :

M l'événement « voir pris le médicament »,
$\overline{M}$ l'événement contraire,
B l'événement « avoir une baisse du taux de glycémie »,
$\overline{B}$ l'événement contraire.

1° Utiliser l'égalité $B = (M \cap B) \cup (\overline{M} \cap B)$ pour montrer que la probabilité $P(B)$ de B est 0,52.

2° On soumet au test un individu pris au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?

3° On contrôle cinq individus au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux n'a pas baissé ?
Le résultat sera donné sous forme décimale à 10^{-3} près.

(1) Substance neutre que l'on substitue à un médicament afin d'étudier l'action psychologique et l'action réelle de celui-ci.