Calculatrices autorisées (mais justification des calculs exigée)

EXERCICE 1 [4 pts]

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1\ ;+\infty[$.

b. Montrer que f est croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni page suivante.
Pour tout réel x_0 de $[1\ ;+\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.
On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;+\infty[$ est une primitive de f.

a. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?

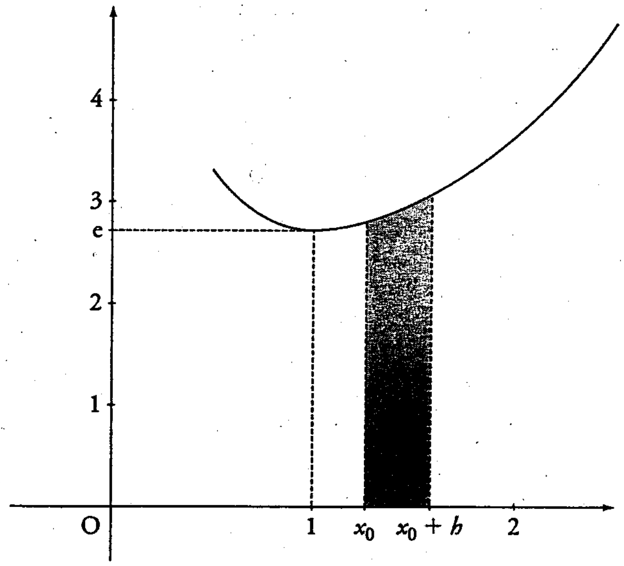
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0)\leqslant\frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h).$$

c. Lorsque $x_0>1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h\geqslant 1$?

d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$.

e. Conclure.



EXERCICE 2 [4 pts]

1° *a)* Montrer que, pour tout réel x, on a

$$\frac{1}{(e^x+1)^2}=1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

b) Calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}=\int_0^1\frac{1}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2° *a)* Déterminer une primitive de la fonction

$$x\mapsto\frac{e^x}{(e^x+1)^3}.$$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$\mathrm{J}=\int_0^1\frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

TSVP →

Calculatrices autorisées (mais justification des calculs exigée)

EXERCICE 3 [5 pts]

ln désigne la fonction logarithme népérien, e la base des logarithmes népériens.

1° Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}.$$

Étudier la fonction f (variations et limites aux bornes) et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2° x étant un réel, soit : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. On ne cherchera pas à calculer F(x).

Interpréter géométriquement $F(x)$. Calculer $F'(x)$.

3° Soit g la fonction numérique définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$g(x) = \ln\left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Calculer $(F \circ g)(O)$.

Calculer, pour x élément de $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right[$, $(F \circ g)'(x)$ et en déduire que :

$$(F \circ g)(x) = x.$$

EXERCICE 4 [7 pts].

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, e^{\frac{t}{n}}\, dt.$$

1. a. Soit la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.
Étudier les variations de φ sur $[0 ; 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$:

$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}.$$

b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$, on a :

$$\frac{3}{2}\, e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}\, e^{\frac{t}{n}}.$$

c. Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}\, n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}\, n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right).$$

d. On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Montrer que, si u_n possède une limite L, alors $3 \leqslant L \leqslant \frac{7}{2}$.

2. a. Vérifier que, pour tout t dans $[0 ; 2]$, on a $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, dt$.

b. Montrer que, pour tout t dans $[0 ; 2]$, on a $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}}\, I$.

c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.