Exercice II

$f(x) = \frac{1}{3}(x + 2e^{\frac{1}{x}})$ $\boxed{x>0}$

$\boxed{\lim_{0^+} f = +\infty}$ car $\frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{(\frac{1}{x})} \to +\infty$

$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$ car $\frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\right) = \boxed{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^2}e^{\frac{1}{x}}}$

$f''(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right]' = -\frac{2}{3}\left[\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}.x^2 - e^{\frac{1}{x}}.2x}{x^4}\right] = \boxed{+\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{3x^4}[1+2x]}$

x	0 $1{,}8$ β $1{,}9$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗ $\ominus$ 0 $\oplus$ ↗ $\frac{1}{3}$
f	$+\infty$ ↘ m ↗ $+\infty$

$f''(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$ car | Exp $\frac{1}{x} > 0$; $1+2x > 0$; $x > 0$

$\Rightarrow f'$ STRICTEMENT CROISSANTE et CONTINUE sur $]0;+\infty[$.

or | $\lim_{0^+} f'(x) = -\infty$ car | $-\frac{2}{3x^2} \to -\infty$; $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$.

$\lim_{+\infty} f'(x) = \frac{1}{3}$ car | $e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$; $-\frac{2}{3x^2} \to 0$

Donc f' réalise une BIJECTION de $]0;+\infty[$ SUR $]-\infty;\frac{1}{3}[$.

Or $0 < \frac{1}{3}$ donc il existe β unique ; $\beta > 0$; tel que $f'(\beta) = 0$.

De plus $f'(1{,}8) \simeq -0{,}02$ et $f'(1{,}9) \simeq +0{,}02$ donc $\beta \in]1{,}8;1{,}9[$.

Donc $f'(x) \leq 0$ sur $]0;\beta]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[\beta;+\infty[$. d'où le tableau de f.

• $m = f(\beta) \simeq f(1{,}8) \simeq 1{,}7$ (le point $(1{,}8;1{,}7)$ est pratiquement à l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la 1ère Bissectrice $(y=x)$).

(D) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ $\quad \lim_{+\infty}[f(x) - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3})] = \lim_{+\infty}\left[\frac{2}{3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{3}\right] = 0^+$ car $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{0^+} = 1^+$ et $(\mathcal{C}_f)$ située au DESSUS de (D).

Donc $\mathcal{C}_f$ asymptote à (D) en $+\infty$.

2°) a) $g(x) = f(x) - x = \frac{2}{3}(e^{\frac{1}{x}} - x)$. $\lim_{0^+} g = \lim_{0^+} f = +\infty$; $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

b) $g'(x) = f'(x) - 1 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1\right]$ TOUJOURS NEGATIF (sur $]0;+\infty[$)

x	0 α $+\infty$
$g'(x)$	$\ominus$
g	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$

d) g STRICTEMENT MONOTONE et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $I = [1{,}7;1{,}8]$

De plus $g(1{,}7) \simeq +0{,}07$ et $g(1{,}8) \simeq -0{,}03$ donc [T.V.I.] il existe α unique, $\alpha \in I$, tel que $g(\alpha) = 0$.

3°) a) $|f(x) - f(y)| \leq 0{,}1\,|x - y|$ qq soit x et $y \in I$.

en particulier $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq 0{,}1 . |u_n - \alpha|$

car $\alpha \in I$ et qq soit n, on a $u_n \in I$ (*). et $f(\alpha) = \alpha$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}1\,|u_n - \alpha|$

(*) | $u_0 \in I$; $u_n \in I \Rightarrow u_{n+1} \in I$ car $f \searrow$ sur I I de $1{,}7 \leq u_n \leq 1{,}8 \Rightarrow f(1{,}7) \geq f(u_n) \geq f(1{,}8)$ $\Rightarrow 1{,}7 \leq u_{n+1} \leq 1{,}8$

$|u_n - \alpha| \leq 0{,}1^n |u_0 - \alpha|$ (H_n).

En effet qq soit n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}1\,|u_n - \alpha|$

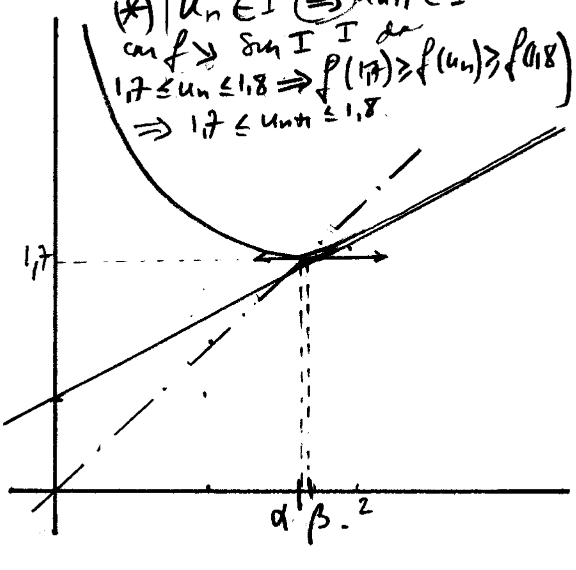
(H_0) vrai ; et (H_n) héréditaire car $(H_n) \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}1\,|u_n - \alpha|$

$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}1 \times 0{,}1^n \times |u_0 - \alpha| = (0{,}1)^n\,|u_0 - \alpha|$.

et $|u_0 - \alpha| < 1 \Rightarrow$ qq soit n $0 \leq |u_n - \alpha| \leq (0{,}1)^n$

$\Rightarrow \lim |u_n - \alpha| = 0$ (gendarmes) $\Rightarrow \boxed{\lim u_n = \alpha}$.

$\alpha = u_6$ à 10^{-6} près $\Rightarrow \alpha =$



Exercice IV

$\boxed{u_n = \dfrac{n^2}{2^n}}$ $u_0 = 0$; $u_1 = \frac{1}{2}$ | $u_2 = 1$; $u_3 = \frac{9}{8} \simeq 1{,}1$

$u_4 = 1$; $u_5 = \frac{25}{32} \simeq 0{,}8$; $u_6 = \frac{36}{64} \simeq 0{,}6$; ... ; (u_n) semble décroissante seulement à partir du 4e rang.

1°) $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$.

a) $\lim v_n = \frac{1}{2}$ (car $\frac{1}{n} \to 0$) et b) $v_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $(1+\frac{1}{n})^2 > 1$ pour $n>0$

c) $v_n < \frac{3}{4} \iff \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 < \frac{3}{4} \iff (1+\frac{1}{n})^2 < \frac{3}{2} \iff 1+\frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$

$\iff n > \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1} = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}{\frac{3}{2}-1} = 2\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}+1\right) \simeq 4{,}8 \Rightarrow \boxed{N=5}$.

d) $n \geq N = 5 \Rightarrow v_n < \frac{3}{4} \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4} \iff u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$ (car $u_n > 0$).

2°) $\boxed{S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n}$ Soit (H_n) la relation $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5$. $(n \geq 5)$.

a) (H_5) VRAI car $u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times u_5$ vrai.

(H_n) héréditaire car $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n \overset{(H_n)}{\Rightarrow} u_{n+1} < \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-5} \cdot u_5 . (H_{n+1})$

donc (H_n) vrai pour tout $n \geq 5$ en vertu du principe d'induction.

b) $S_n \leq 1 \cdot u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} \cdot u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^{7-5} \cdot u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5 = \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \cdot u_5$.

or on sait que $1 + q + q^2 + \cdots + q^p = \dfrac{1-q^{p+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

Donc $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\frac{3}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leq 4$.

D'où $\boxed{S_n \leq 4 \cdot u_5} \simeq 3{,}2$.

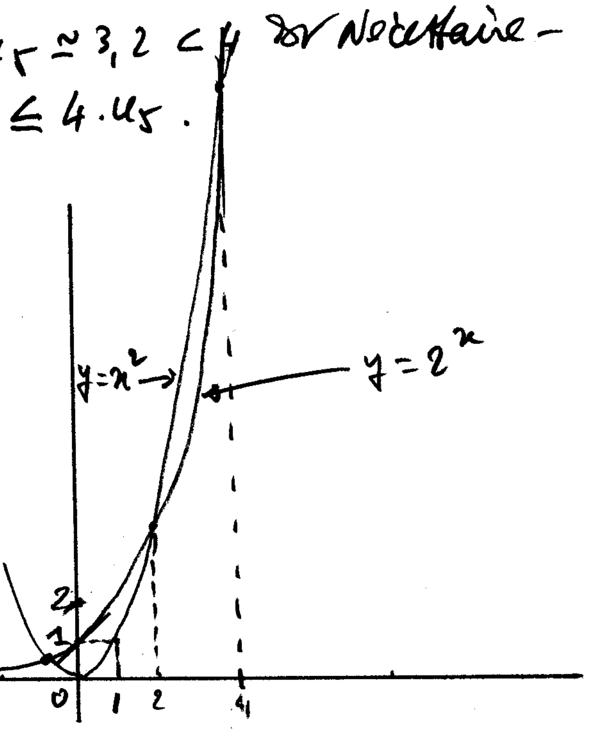
3°) $(S_n) \nearrow$ car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ quel soit $n \geq 5$ i.e. $S_{n+1} > S_n$ pour tout $n \geq 5$

Donc S_n CROISSANTE et MAJORÉE par $4 \cdot u_5 \simeq 3{,}2 < 4$ est nécessairement convergente. Sa limite S est $\leq 4 \cdot u_5$.

<u>NB</u> : $u_2 = u_4 = 1$ signifie que la courbe représentative de $y = x^2$ et celle de $y = 2^x$ se coupent 2 fois entre 0 et 5.

On voit aussi que l'exponentielle 2^x est en dessous de la puissance x^2 sur l'intervalle $[2;4]$; l'exponentielle domine la puissance seulement pour les très grandes valeurs de x.

- Il existe une autre valeur de $x \simeq -0{,}5$ telle que $2^x = x^2$ comme le montre la figure.



EXERCICE III [A] $\boxed{g(x) = e^x(1-x)+1}$ | TS5 – C3 – C0 – P. 2/3.

g définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions élémentaires ayant ces 3 propriétés.

$g'(x) = e^x(1-x) + e^x(-1) = -x e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sgn$[g'(x)]$ = Sgn$(-x)$.

$g(0) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1^+$ car $\left| \begin{array}{l} e^x \to 0^+ \\ -xe^x \to 0^+ \end{array} \right.$

$\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ (pas d'indétermination).

x	$-\infty$		0		$1{,}27\ \alpha\ 1{,}28$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$

- g STRICTEMENT DECROISSANTE et CONTINUE sur $[0;+\infty[$ donc en particulier sur $[1{,}27;1{,}28]$ de plus $g(1{,}27) \simeq 0{,}04$ et $g(1{,}28) \simeq -0{,}01$ donc – par bijection – il existe α ~~unique~~, $\alpha \in [1{,}27;1{,}28] / g(\alpha) = 0$.
- On déduit du | tableau de variation et des limites | que $g(x) > 0$ sur $]-\infty;\alpha[$
$g(x) \leq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$.

[B]. $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{e^x+1} + 2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{2}$ car $\dfrac{x}{e^x+1} = \dfrac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} \to 0^+$

en effet $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite (D) d'équation $y = 2$ pour $x \to +\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est au DESSUS de cette droite pour $x > 0$. $\mathcal{C}_f$ en dessous de (D) sur $]-\infty;0]$

- $\mathcal{C}_f$ coupe (D) $y = 2$ en $(0;2)$ car $f(0) = 2$. (pas d'indétermination).

2°) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0^+$.

b) (d) $y = x+2$ | Asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et $\mathcal{C}_f$ au DESS de (d) | car $\lim\limits_{-\infty} [f(x) - (x+2)] = 0^+$

en effet $f(x) - (x+2) = \dfrac{x}{e^x+1} - x = x\left[\dfrac{1}{e^x+1} - 1\right] = x\left[\dfrac{-e^x}{e^x+1}\right] = \dfrac{-xe^x}{e^x+1}$.

$[\lim\limits_{x \to -\infty} (-xe^x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 1 = 0 + 1 = 1.]$.

3°) a) $f'(x) = \dfrac{(e^x+1) - xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

Donc Sgn $f'(x)$ = Sgn $g(x)$:

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	2

$m = f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha+1} + 2$

mais $g(\alpha) = 0$

donc $e^\alpha(1-\alpha)+1 = 0$

$e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$

d'où $m = f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{1+\frac{1}{\alpha-1}} + 2 = \alpha - 1 + 2 = \boxed{\alpha+1}$

$f'(\alpha) = 0$

i.e $f(\alpha) = p\alpha + q$ avec $\boxed{p = q = 1}$.