Exercice II

$f(x) = \frac{1}{3}\left(x + 2e^{\frac{1}{x}}\right)$ $\boxed{x > 0}$

$\boxed{\lim_{0^+} f = +\infty}$ car $\frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{(\frac{1}{x})} \to +\infty$

$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$ car $\frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3x^2}e^{\frac{1}{x}}\right.}$

$f''(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right]' = -\frac{2}{3}\left[\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}.x^2 - e^{\frac{1}{x}}.2x}{x^4}\right] = \boxed{+\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{3x^4}[1+2x]}.$

x	0	$1,8$ β $1,9$	$+\infty$.
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$ ⊖	0	⊕ $\frac{1}{3}$
f	$+\infty$	m	$+\infty$

$f''(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$ car $\left| \begin{array}{l} \exp \frac{1}{x} > 0 \\ 1 + 2x > 0. \\ x > 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'$ STRICTEMENT CROISSANTE et CONTINUE sur $]0;+\infty[$.

or $\lim_{0^+} f'(x) = -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3x^2} \to -\infty \\ e^{\frac{1}{x}} \to +\infty. \end{array}\right.$

$\lim_{+\infty} f'(x) = \frac{1}{3}$ car $\left| \begin{array}{l} e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1 \\ -\frac{2}{3x^2} \to 0 \end{array}\right.$

Donc f' réalise une BIJECTION de $]0;+\infty[$ SUR $]-\infty;\frac{1}{3}[$.

Or $0 < \frac{1}{3}$ donc il existe β unique ; $\beta > 0$; tel que $f'(\beta) = 0$.

De plus $f'(1,8) \simeq -0,02$ et $f'(1,9) \simeq +0,02$ donc $\beta \in]1,8;1,9[$.

Donc $f'(x) \leq 0$ sur $]0;\beta]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[\beta;+\infty[$. d'où le tableau de f.

• $m = f(\beta) \simeq f(1,8) \simeq 1,7$ (le point $(1,8;1,7)$ est pratiquement à l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la 1ère Bissectrice $(y=x)$).

(D) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ $\lim_{+\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)\right] = \lim_{+\infty}\left[\frac{2}{3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{3}\right] = 0^+$ car $\left|\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{0^+} = 1^+\right.$

Donc $\mathcal{C}_f$ asymptote à (D) en $+\infty$ et $(\mathcal{C}_f)$ située au DESSUS de (D).

2°) a) $g(x) = f(x) - x = \frac{2}{3}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right)$. $\lim_{0^+} g = \lim_{0^+} f = +\infty$; $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

b) $g'(x) = f'(x) - 1 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1\right]$ TOUJOURS NEGATIF (sur $]0;+\infty[$.)

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		⊖	
g	$+\infty$	0	$-\infty$

d) g STRICTEMENT MONOTONE et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $I = [1,7;1,8]$

de plus $g(1,7) \simeq +0,07$ et $g(1,8) \simeq -0,03$ donc [T.V.I.] il existe α unique, $\alpha \in I$, tel que $g(\alpha) = 0$.

3°) a) $|f(x) - f(y)| \leq 0,1\,|x - y|$ qq soit x et $y \in I$.

en particulier $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq 0,1 \cdot |u_n - \alpha|$

car $\alpha \in I$ et qq soit n, on a $u_n \in I$ (*). et $f(\alpha) = \alpha$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,1\,|u_n - \alpha|$

$|u_n - \alpha| \leq 0,1^n \times |u_0 - \alpha|$ (H_n).

En suite qq soit n on a $|u_n - \alpha| \leq 0,1\,|u_n - \alpha|$

(H_0) vrai ; et (H_n) héréditaire car $(H_n) \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,1\,|u_n - \alpha|$

$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,1 \times 0,1^n \times |u_0 - \alpha| = (0,1)^n\,|u_0 - \alpha|$.

et $|u_0 - \alpha| < 1 \Rightarrow$ qq soit n, $0 \leq |u_n - \alpha| \leq (0,1)^n$

$\Rightarrow \lim |u_n - \alpha| = 0$ (gendarmes) $\Rightarrow \boxed{\lim u_n = \alpha}$.

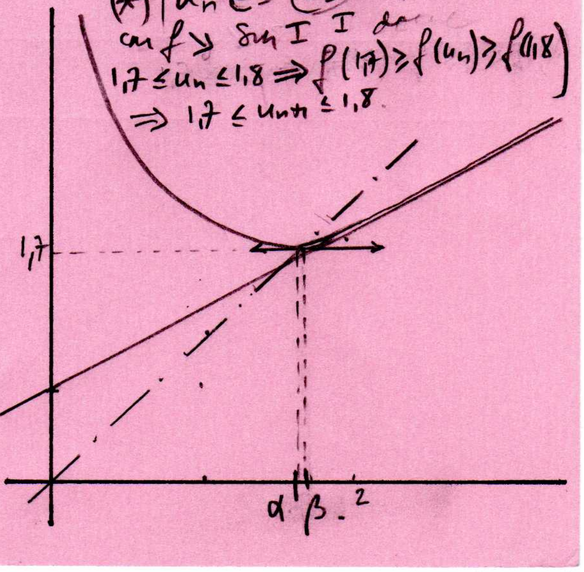
$\alpha = u_6$ à 10^{-6} près $\Rightarrow \alpha =$

(*) $\left| \begin{array}{l} u_0 \in I \\ u_n \in I \Rightarrow u_{n+1} \in I \end{array}\right.$

car $f \nearrow$ sur I donc

$1,7 \leq u_n \leq 1,8 \Rightarrow f(1,7) \geq f(u_n) \geq f(1,8)$

$\Rightarrow 1,7 \leq u_{n+1} \leq 1,8$.



EXERCICE III [A] $\boxed{g(x) = e^x(1-x)+1}$.

g définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions élémentaires ayant ces 3 propriétés.

$g'(x) = e^x(1-x) + e^x(-1) = -x e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Sgn}[g'(x)] = \operatorname{Sgn}(-x)$.

$g(0) = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1^+$ car $\left| \begin{array}{l} e^x \to 0^+ \\ -xe^x \to 0^+ \end{array}\right.$

$\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ (pas d'indétermination).

x	$-\infty$		0		$1{,}27\ \alpha\ 1{,}28$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- g STRICTEMENT DECROISSANTE et CONTINUE sur $[0;+\infty[$ donc en particulier sur $[1{,}27 ; 1{,}28]$ de plus $g(1{,}27) \simeq 0{,}04$ et $g(1{,}28) \simeq -0{,}01$ donc – par bijection – il existe α ~~unique~~, $\alpha \in [1{,}27 ; 1{,}28] / g(\alpha) = 0$.
- On déduit du $\left|\begin{array}{l}\text{tableau de variation} \\ \text{et des limites}\end{array}\right|$ que $g(x) > 0$ sur $]-\infty;\alpha[$
  $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$.

[B]. $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{e^x+1} + 2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{2}$ car $\dfrac{x}{e^x+1} = \dfrac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} \to 0^+$

en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$.

Par suite $\mathcal{C}_f$ admet la droite (D) d'équation $y = 2$ pour $x \to +\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est au DESSUS de cette droite pour $x > 0$. $\mathcal{C}_f$ en dessous de (D) sur $]-\infty;0]$

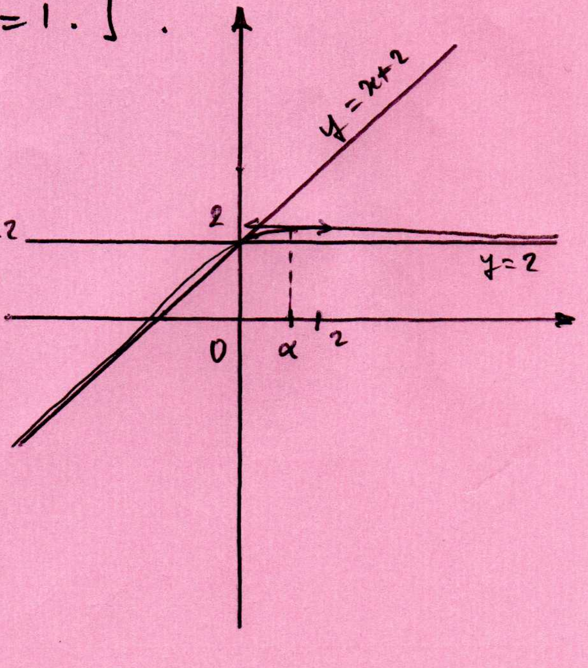
- $\mathcal{C}_f$ coupe (D) $y=2$ en $(0;2)$ car $f(0) = 2$. (pas d'indétermination).

2°) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0^+$.

b) (d) $y = x+2$ $\left|\begin{array}{l}\text{Asymptote à } (\mathcal{C}_f) \text{ en } -\infty \\ \text{et } \mathcal{C}_f \text{ au DESS de (d)}\end{array}\right|$ car $\lim\limits_{-\infty}[f(x) - (x+2)] = 0^+$

en effet $f(x) - (x+2) = \dfrac{x}{e^x+1} - x = x\left[\dfrac{1}{e^x+1} - 1\right] = x\left[\dfrac{-e^x}{e^x+1}\right] = \dfrac{-xe^x}{e^x+1}$.

$[\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 0+1 = 1.]$.



3°) a) $f'(x) = \dfrac{(e^x+1) - xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

Donc $\operatorname{Sgn} f'(x) = \operatorname{Sgn} g(x)$:

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	2

$m = f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha+1} + 2$

mais $g(\alpha) = 0$

donc $e^\alpha(1-\alpha)+1 = 0$

$e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$

d'où $m = f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{1+\frac{1}{\alpha-1}} + 2 = \alpha - 1 + 2 = \boxed{\alpha+1}$

$f'(\alpha) = 0$

i.e $f(\alpha) = p\alpha + q$ avec $\boxed{p = q = 1}$.

Exercice IV $\boxed{u_n = \dfrac{n^2}{2^n}}$ $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ | $u_2 = 1$, $u_3 = \frac{9}{8} \simeq 1,1$

$u_4 = 1$; $u_5 = \frac{25}{32} \simeq 0,8$; $u_6 = \frac{36}{64} \simeq 0,6$; ... ; (u_n) semble décroissante seulement à partir du 4e rang.

1°) $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$.

a) $\lim v_n = \frac{1}{2}$ (car $\frac{1}{n} \to 0$) et b) $v_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $(1+\frac{1}{n})^2 > 1$ pour $n>0$

c) $v_n < \frac{3}{4} \iff \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 < \frac{3}{4} \iff (1+\frac{1}{n})^2 < \frac{3}{2} \iff 1+\frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}}-1$

$\iff n > \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1} = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}{\frac{3}{2}-1} = 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right) \simeq 4,8 \Rightarrow \boxed{N=5}$.

d) $n \geq N = 5 \Rightarrow v_n < \frac{3}{4} \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4} \iff u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$ (car $u_n > 0$).

2°) $\boxed{S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n}$ Soit (H_n) la relation $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5$ $(n \geq 5)$.

a) (H_5) VRAI car $u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times u_5$ vrai.

(H_n) héréditaire car $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n \overset{(H_n)}{\Rightarrow} u_{n+1} < \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-5} \cdot u_5$. (H_{n+1})

Donc (H_n) vrai pour tout $n \geq 5$ en vertu du principe d'induction.

b) $S_n \leq 1 \cdot u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} \cdot u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^{7-5} \cdot u_5 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5 = \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \cdot u_5$.

Or on sait que $1 + q + q^2 + \dots + q^p = \dfrac{1-q^{p+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

Donc $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\frac{3}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leq 4$.

D'où $\boxed{S_n \leq 4 \cdot u_5} \simeq 3,2$.

3°) $(S_n) \nearrow$ car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ quel que soit $n \geq 5$ i.e. $S_{n+1} > S_n$ pour tout $n \geq 5$

Donc S_n CROISSANTE et MAJORÉE par $4 \cdot u_5 \simeq 3,2 < 4$ est nécessairement convergente. Sa limite S est $\leq 4 \cdot u_5$.

<u>NB</u> : $u_2 = u_4 = 1$ signifie que la courbe représentative de $y = x^2$ et celle de $y = 2^x$ se coupent 2 fois entre 0 et 5.

On voit aussi que l'exponentielle 2^x est en dessous de la puissance x^2 sur l'intervalle $[2;4]$; l'exponentielle domine la puissance seulement pour les très grandes valeurs de x.

• Il existe une autre valeur de $x \simeq -0,5$ telle que $2^x = x^2$ comme le montre la figure.