Calculatrices nécessaires

EXERCICE I : R.O.C. [4 pts]

1°) Prérequis : on suppose connue la propriété suivante : quelque soit $x \in$ R, $e^x > x$.

a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0^-$

2°) Démontrer que la courbe représentative de la fonction Exponentielle est toujours située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE II : [5 pts] : Résolution d'une équation non algébrique à l'aide d'une suite.

Soit pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x + 2.e^{\frac{1}{x}})$. On se propose de résoudre l'équation $f(x) = x$

Pour cela on pose $g(x) = f(x) – x$ et on recherche une solution de l'équation $g(x) = 0$

1∞) Etude de la fonction f .

a. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$
b. Calculer $f\,'(x)$ et $f\,''(x)$ sur $]0 ; +\infty[$
c. Démontrer qu'il existe sur $]0 ; +\infty[$ un nombre β unique en lequel $f\,'(x)$ s'annule et change de signe. Montrer que $1,8 < \beta < 1,9$
d. En déduire le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
e. Montrer que la droite *(D)* d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ est asymptote à la *Cf* et indiquer sa position relative.
f. Tracer *(D)* la courbe de *Cf* sur $]0 ; +\infty[$ et la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal.

2∞) Etude de la fonction g.

a. Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$
b. Calculer $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$
c. Dresser le tableau des variations et des limites de g sur $]0 ; +\infty[$
d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = [1,7 ; 1,8]$.

3∞) Etude de la suite Un définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 = 1,8$

a. On suppose établi que quelque soit $x \in I$, on a $| f(x) - \alpha | \leq 0,1 | x - \alpha |$
en déduire que quelque soit n on a $| U_{n+1} - \alpha | \leq 0,1 | U_n - \alpha |$
b. En déduire par récurrence que $| U_n - \alpha | \leq 0,1^n$.
c. En déduire la limite de U_n et une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Calculatrices nécessaires

EXERCICE III : [6 pts]

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g. **[0,75 pt]**

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1{,}27\ ;\ 1{,}28]$; on note α cette solution. **[0,75 pt]**

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$. **[0,5 pt]**
Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$. **[0,5 pt]**

Partie B : Étude de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x+1} + 2$$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat. **[0,5 pt]**

2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$. **[0,25 pt]**

b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x+2$ est une asymptote pour C_f. **[0,5 pt]**

c. Étudier la position de C_f par rapport à (d). **[0,5 pt]**

3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans le **A.** **[0,5 pt]**

b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$. **[0,5 pt]**

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f. **[0,25 pt]**

4. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α. **[0,5 pt]**

EXERCICE IV: [5 pts]

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres, réels strictement positifs par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$. **[0,5 pt]**

b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$. **[0,5 pt]**

c. Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \geqslant N$, $v_n < \frac{3}{4}$. **[0,5 pt]**

d. En déduire que si $n \geqslant N$ alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$. **[0,5 pt]**

On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:

$$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$ **[1 pt]**

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$ **[1 pt]**

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$. **[0,5 pt]**

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge. **[0,5 pt]**