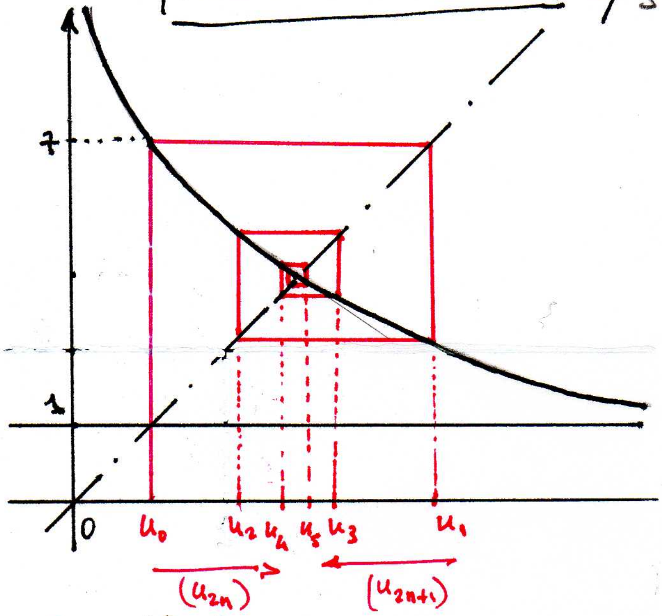
I. Etude de suites. $u_0=1$ $\quad u_{n+1}=1+\frac{6}{u_n}$.



A - 1°) $f(x)=1+\frac{6}{x}$ $\quad x>0$ $\quad f \searrow$ sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{+\infty} f = 1$; $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

2°) (u_n) n'est pas monotone, mais bornée par $u_0=1$ et $u_1=7$. Elle semble converger vers le point d'abscisse 3. [$f(3)=3$).

3°) (P_n) : $1\le u_n\le 7$ • (P_0) VRAI car $u_0=1$

• Hérédité ? soit n fixé.

$(P_n) \Rightarrow \frac{1}{7} \le \frac{1}{u_n}\le 1 \Rightarrow \frac{6}{7}\le\frac{6}{u_n}\le 6$

$\Rightarrow 1+\frac{6}{7} \le 1+\frac{6}{u_n}\le 7 \Rightarrow 1\le \frac{13}{7}\le u_{n+1}\le 7 \Rightarrow (P_{n+1})$. OK.

• Conclusion : en vertu du principe de récurrence on peut dire que (P_n) est VRAI pour tout $n\in\mathbb{N}$. CQFD

4°) α point fixe de f sur $[1;7]$ $\iff f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha\in[1;7]$.

$\iff 1+\frac{6}{\alpha}=\alpha$ et $1\le\alpha\le 7$ $\iff \alpha^2-\alpha-6=0$ et $\alpha\in[1;7] \iff \boxed{\alpha=3}$

B - $\boxed{v_n=u_{2n}}$ $\boxed{w_n=u_{2n+1}}$ $\quad g(x)=f[f(x)]$

1°) $g(x) = 1+\frac{6}{f(x)} = 1+\frac{6}{1+\frac{6}{x}} = 1+\frac{6x}{x+6} = \frac{7x+6}{x+6}$. CQFD

$g(x) = \frac{7(x+6)-42+6}{x+6} = 7-\frac{36}{x+6} \Rightarrow g'(x) = +\frac{36}{(x+6)^2}>0$; $g\nearrow$ sur $[1;7]$.

2°) $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f[f(u_{2n})] = g(u_{2n}) = g(v_n)$.

$w_{n+1} = u_{2n+3} = f[f(u_{2n+1})] = g(u_{2n+1}) = g(w_n)$.

3°) (v_n) croissante : (P_n) $v_n \le v_{n+1}$ • INIT : $v_0=u_0=1 \le v_1=u_2=\frac{13}{7}$. OK.

• Hérédité (n fixé) : $(P_n) \Rightarrow g(v_n)\le g(v_{n+1})$ car $g\nearrow$ sur $[1;7]$ et $1\le v_n\le v_{n+1}\le 7$. (voir 4°)

Donc $v_{n+1}\le v_{n+2} \Rightarrow (P_{n+1})$. CQFD.

De même (P_n) $w_{n+1}\le w_n$ est VRAI pour $n=0$ car $w_1=u_3=\frac{55}{13}\le u_1=w_0=7$

• Hérédité (n fixé) | $(P_n) \Rightarrow g(w_{n+1})\le g(w_n)$ car $g\nearrow$ sur $[1;7]$ et $w_{n+1}\in[1;7]$ (voir 4°)

Donc $w_{n+2}\le w_{n+1} \Rightarrow (P_{n+1})$. CQFD.

4°) Soit (P_n) : $1\le v_n\le w_n\le 7$. • INIT : OK car $v_0=u_0=1$ et $w_0=u_1=7$.

Hérédité (n fixé) : $(P_n) \Rightarrow g(1)\le g(v_n)\le g(w_n)\le g(7)$ car $g\nearrow$ sur $[1;7]$.

donc $\frac{13}{7}\le v_{n+1}\le w_{n+1}\le\frac{55}{13} \Rightarrow (P_{n+1})$ car $1\le\frac{13}{7}$ et $\frac{55}{13}\le 7$.

I - B - 5°) $w_n - v_n = g(w_{n-1}) - g(v_{n-1})$.

$$= \left(7 - \frac{36}{w_{n-1}+6}\right) - \left(7 - \frac{36}{v_{n-1}+6}\right) = 36\left(\frac{1}{v_{n-1}+6} - \frac{1}{w_{n-1}+6}\right) = \frac{36}{(v_{n-1}+6)(w_{n-1}+6)}\left[w_{n-1} - v_{n-1}\right].$$

or d'après 4°) on a $1 \le v_{n-1} \le 7 \Rightarrow 7 \le v_{n-1} + 6 \le 13 \Rightarrow \frac{1}{13} \le \frac{1}{v_{n-1}+6} \le \frac{1}{7}$

et de même pour w_{n-1} : $\frac{1}{13} \le \frac{1}{w_{n-1}+6} \le \frac{1}{7}$.

Par suite on obtient : $w_n - v_n \le \frac{36}{49}\left[w_{n-1} - v_{n-1}\right]$ or $\frac{36}{49} < 0,9$ donc $\boxed{w_n - v_n \le 0,9\,(w_{n-1} - v_{n-1})}$ CQFD

6°) Par récurrence immédiate* on obtient :

$0 \le w_n - v_n \le (0,9)^n (w_0 - v_0)$ i.e. $0 \le w_n - v_n \le 6 \times (0,9)^n$.

7°) Par suite $\lim\,[w_n - v_n] = 0$

8°) les suites (v_n) et (w_n) sont donc ADJACENTES d'après (5°) et (7°).

elles ont donc une limite commune ℓ.

De plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n} \le u_{2n+1} = w_n$.

Donc par ~~passage~~ passage à la limite : $\lim u_n = \ell$, et comme on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f CONTINUE (sur $[1;7]$) on en déduit que $\ell = f(\ell)$ c'est-à-dire que ℓ est le point fixe de f sur $[1;7]$ donc $\boxed{\ell = 3}$.

---

* on pose (H_n) : $w_n - v_n \le (0,9)^n \times 6$.

1°) Initialisation : (H_0) : $w_0 - v_0 = 6 \le (0,9)^0 \times 6$ VRAI.

2°) Hérédité : Soit n fixé montrons que $(H_n) \Longrightarrow (H_{n+1})$.

$(H_n) \Longleftrightarrow w_n - v_n \le (0,9)^n \times 6$

et d'après B-5°) on a montré que pour tout n $w_{n+1} - v_{n+1} \le (0,9)(w_n - v_n)$

Donc $w_{n+1} - v_{n+1} \le (0,9)\left[(0,9)^n \times 6\right] = (0,9)^{n+1} \times 6$.

$\Longrightarrow w_{n+1} - v_{n+1} \le (0,9)^{n+1} \times 6 \Longleftrightarrow (H_{n+1})$. CQFD.

3°) Conclusion : (H_n) vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

NB : la démonstration de l'hérédité étant déduite immédiatement de la relation précédente B-5°) on parle souvent de

(•) "récurrence immédiate". Au bac il est prudent d'expliciter le raisonnement comme ci-dessus.

(•) Il revient au même d'écrire directement.

$w_n - v_n \le (0,9)(w_{n-1} - v_{n-1}) \le (0,9)^2 (w_{n-2} - v_{n-2}) \le \dots \le (0,9)^n (w_0 - v_0) \le 0,9^n \times 6$

II - Etude de suites couplées

$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$ | $b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$

$a_0 = 2$ | $b_0 = 4$

$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n . \\ p_n = a_n b_n . \end{cases}$

A- 1°) (u_n) constante : $u_0 = a_0 + b_0 = 6$.

(H_n) $u_n = 6 \overset{?}{\Longrightarrow} u_{n+1} = 6$ (H_{n+1}).

en effet : $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{4}\left[(a_n + 3b_n) + (3a_n + b_n)\right] = \frac{1}{4}(4a_n + 4b_n) = a_n + b_n = u_n = 6$.

Donc qqsoit $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 6}$ donc $\lim u_n = 6$.

2°) (v_n) géométrique $\Longleftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ / $v_{n+1} = k . v_n$.

or en effet $v_{n+1} = \frac{1}{4}\left[(a_n + 3b_n) - (3a_n + b_n)\right] = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) = -\frac{1}{2} v_n$.

Donc (v_n) géom de | Raison $k = -\frac{1}{2}$ $\left(|k| = \frac{1}{2} < 1\right)$; 1er terme $v_0 = a_0 - b_0 = -2$ $\Rightarrow v_n = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

donc $\lim v_n = 0$.

3°) $\begin{cases} u_n + v_n = 2a_n . \\ u_n - v_n = 2b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{u_n + v_n}{2} = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 3 \\ b_n = \frac{u_n - v_n}{2} = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 3. \end{cases}$

4°).

5°) $p_n = a_n b_n = 9 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} = 9 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow 9$.

B- Etude dans $\mathbb{C}$. $\boxed{z_n = a_n + i . b_n} \longleftrightarrow A_n$ dans le plan.

1°) $(a_n)^2 + (b_n)^2 = (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n = (u_n)^2 - 2p_n = 36 - 2\left(9 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 18 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

2°) $|z_n| = \sqrt{a_n^2 + i b_n^2} = \sqrt{18 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3°) $\lim |z_n| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ⊕

4°) Le point A_n se rapproche indéfiniment du cercle de centre O et de rayon $R = 3\sqrt{2}$ (à l'extérieur).

BONUS $z_{n+1} - z_n = (a_{n+1} + i b_{n+1}) - (a_n + i b_n)$

$= \frac{1}{4}\left[a_n + 3b_n + i(3a_n + b_n) - 4a_n - 4ib_n\right]$

$= \frac{1}{4}\left[(-3a_n + 3b_n) + i(3a_n - 3b_n)\right]$

$= \frac{3}{4}\left[-v_n + i v_n\right] = -\frac{3v_n}{4}(1+i)$

$\Rightarrow |z_{n+1} - z_n| = \frac{3}{4}|v_n|\sqrt{2} = \frac{3}{4} \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\begin{cases} \text{S. géom.} \\ q = \frac{1}{2} \\ \ell_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$L = \lim \sum_{k=0}^{n} \ell_k = \lim\left[\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_n\right] = \ell_0 \frac{1}{1-q} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$

Donc $A_0 A_1 A_2 \dots A_n \dots = L = 3\sqrt{2}$.

III - R.O.C. [Restitution Organisée des Connaissances]

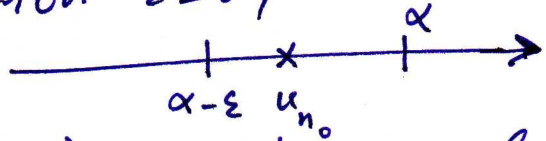
Rappel : $\lim u_n = +\infty \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{quelque soit } A \in \mathbb{R}, \text{ il existe } n_0 \\ \text{tel que } n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A \end{array} \right\}$.

[A] Hyp : $(u_n) \nearrow$ et majorée.

1°) Si il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$ alors quelque soit $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0}$ (car $(u_n) \nearrow$) donc $u_n \geq M$.

2°) Soit α le plus petit des majorants de (u_n).

Alors quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe au moins un n_0 tel que



Donc d'après le 1°) tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $[\alpha - \varepsilon ; \alpha]$ dès que $n \geq n_0$.

c'est à dire que $\lim u_n = \alpha$.

3°) "Toute suite croissante et majorée est CONVERGENTE et a pour limite le plus petit de ses majorants."

[B] QCM Justifié :

a) "Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$" : FAUX

contrex : $u_n = (-2)^n$ $|u_n| = 2^n$ Non majoré mais (u_n) n'a pas de limite.

b) "Si une suite est croissante, alors elle tend vers $+\infty$" : FAUX

contrex : $u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ est $\nearrow$ (car $\frac{1}{n} \searrow$ et $\left(-\frac{1}{n}\right) \nearrow$) et $\lim u_n = 1$.

c) "Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée" : VRAI

par définition (donnée dans l'énoncé) quelque soit le nombre réel M il existe un rang n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$. Donc (u_n) Non majorée.

d) "Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante" : FAUX

contrex : $u_n = \frac{n}{|\sin n|} \geq n$ donc $u_n \to +\infty$, mais (u_n) n'est pas croissante.

IV - Transformations Complexes

[A] - 1°) $z^3+2z^2-16 = (z-2)(z^2+bz+c)$ [Polynôme divisible par $(z-2)$ car 2 annule z^3+2z^2-16]

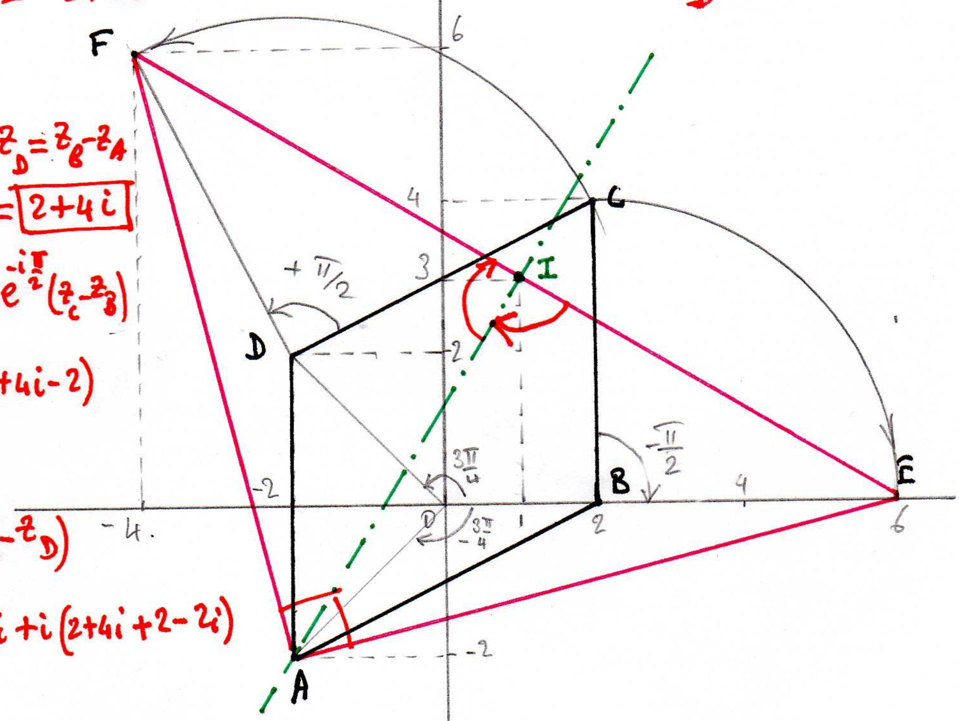
$\iff z^3+2z^2-16 = z^3+(b-2)z^2+(c-2b)z-2c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\iff \begin{cases} b-2=2 \\ c-2b=0 \\ -2c=-16 \end{cases}$

$\iff \boxed{b=4}\ \boxed{c=8}$. $(a=1)$.

D'où $z^3+2z^2-16 = (z-2)(z^2+4z+8)$

2°) $z^3+2z^2-16=0 \iff \begin{cases} z=2 \\ \text{ou} \\ z^2+4z+8=0 \iff (z+2)^2=-4=(2i)^2 \end{cases}$ (E)

Donc solutions de (E) : $\begin{cases} z=2 = 2.e^{i.0} = z_B \\ z=-2-2i = 2(-1-i) = 2.\sqrt{2}.e^{-3i\frac{\pi}{4}} = z_A = \overline{z_D} \\ z=-2+2i = 2(-1+i) = 2.\sqrt{2}.e^{3i\frac{\pi}{4}} = z_D = \overline{z_A} \end{cases}$



[B] - 2°) ABCD //logramme

$\iff \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \iff z_C - z_D = z_B - z_A$

$\iff z_C = z_D + z_B - z_A = \boxed{2+4i}$

3°) $E = r_{[B;-\frac{\pi}{2}]}(C) \iff z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$

$\iff z_E = z_B - i(z_C - z_B) = 2 - i(2+4i-2)$

$\iff \boxed{z_E = 6}$.

• $F = r_{[D;+\frac{\pi}{2}]}(C) \iff z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D)$

$\iff z_F = z_D + i(z_C - z_D) = -2+2i+i(2+4i+2-2i)$

$\iff \boxed{z_F = -4+6i}$.

4°) $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{6i-4+2+2i}{6+2+2i} = \dfrac{-2+8i}{8+2i} = \dfrac{i(8+2i)}{8+2i} = i$ CQFD.

Donc $\left|\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = 1 \iff \dfrac{AF}{AE} = 1 \iff AE = AF \iff \widehat{AEF}$ ISOCÈLE en A.

$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = +\dfrac{\pi}{2} \iff (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = +\dfrac{\pi}{2} \iff \widehat{AEF}$ Rectangle en A

5°) I milieu de EF et $\widehat{AEF}$ ISOCÈLE RECTANGLE en A $\Rightarrow$ (AI) médiatrice de [EF] donc dans la rotation $r_{[I;-\frac{\pi}{2}]}$ on a $\begin{cases} E \mapsto A \\ A \mapsto F \end{cases}$

et la droite (BE) a donc pour image la perpendiculaire à (BE) passant par A. Donc l'image de B est sur la droite (AD). De plus la rotation conserve les distances donc [EB] a pour image le segment de longueur $4 = BE$ or $\|\overrightarrow{AD}\| = 4$ donc D est l'image de B par $r[I;-\pi/2]$. Finalement $EBA \mapsto ADF$.