Calculatrices inutiles

EXERCICE I [5 points] Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{u_n}$

A – On pose $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x}$ pour $x > 0$.

1°) Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux).
2°) D'après la figure obtenue, la suite (u_n) est-elle monotone ? bornée ?
3°) Montrer par récurrence que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq 7$
4°) Démontrer que la fonction f admet un point fixe α unique sur l'intervalle [1 ; 7].

B – On pose $v_n = u_{2n}$ suite des termes de rang pair et $w_n = u_{2n+1}$ la suite des termes de rang impair. On se propose de démontrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

1°) Soit $g = f \circ f$ fonction composée, démontrer que $f[f(x)] = \dfrac{7x+6}{x+6}$ et indiquer son sens de variation sur [1 ;7].
2°) Montrer que $v_{n+1} = g(v_n)$ et de même que $w_{n+1} = g(w_n)$
3°) Démontrer par récurrence que (v_n) est strictement croissante et que (w_n) est strictement décroissante.
4°) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq v_n \leq w_n \leq 7$
5°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n - v_n \leq 0{,}9\,[\,w_{n-1} - v_{n-1}]$
6°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq w_n - v_n \leq 6.(0{,}9)^n$
7°) En déduire la limite de $[w_n - v_n]$
8°) En déduire la limite de (v_n), (w_n) et (u_n).

EXERCICE II [5 points] Étude de suites composées : (a_n) et (b_n) définies par la récurrence croisée :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3\,b_n)\ ,\ a_0 = 2 \quad ; \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)\ ;\ b_0 = 4$$

A – Étude dans les nombres Réels.

On pose $u_n = a_n + b_n$; $v_n = a_n - b_n$; $p_n = a_n.b_n$

1°) Démontrer par récurrence que (u_n) est constante et indiquer sa limite.
2°) Démontrer que (v_n) est géométrique, indiquer sa limite
3°) Exprimer a_n et b_n en fonction de u_n et v_n, puis en fonction de n,
4°) Montrer que a_n et b_n ont la même limite et indiquer cette limite.
5°) Calculer p_n en fonction de n et indiquer sa limite.

B – Étude dans les nombres Complexes.

On pose $Z_n = a_n + ib_n$ et on appelle A_n son image dans le plan complexe.

1°) Calculer $(a_n)^2 + (b_n)^2$ en fonction de u_n et de p_n
2°) Exprimer $|Z_n|$ en fonction de n.
3°) Calculer la limite de $|Z_n|$
4°) Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers l'infini ?

Question Bonus (difficile…)
Calculer $|Z_{n+1} - Z_n|$ en fonction de n et en déduire la limite de la longueur de la ligne brisée A_0 , A_1 , A_2 , A_3 ,…. A_n , …..

Calculatrices inutiles

EXERCICE III [5 points] **R.O.C. Star**…

Prérequis admis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$:

*« Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, et seulement si, pour tout **R**éel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »*

$$(\forall A, A\in \mathbf{R}),\{(\exists n_0, n_0 \in \mathbb{N}),[(\forall n, n \in \mathbb{N}),(n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)]\}$$

Partie A : Soit (u_n) une suite croissante et majorée.

1°) Soit M un nombre Réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq M$
Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq M$

2°) Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?

3°) Enoncer un théorème correspondant à cette situation.

Partie B :

Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des questions suivantes en justifiant chaque réponse soit par une démonstration, soit par un contre-exemple.

a. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$
b. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$
c. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée
d. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

EXERCICE IV [5 points] **Transformations COMPLEXES**

A - On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0$$

1°) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - 2)(az^2 + bz + c) = 0$
où a, b, c , sont des nombres réels que l'on déterminera.

2°) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

B – Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.

1°) Placer dans le repère les points A, B, D, d'affixes respectives :

$$Z_A = -2 - 2i \; ; \; Z_B = 2 \; ; \; Z_D = -2 + 2i$$

2°) Calculer l'affixe Z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point C sur la figure.

3°) Soit E l'image de C par la rotation de centre **B** et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
et F l'image de C par la rotation de centre **D** et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes Z_E et Z_F des points E et F et placer ces points sur la figure.

4°) Vérifier que $\frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_A} = i$, et en déduire la nature du triangle AEF.

5°) Soit I le milieu du segment [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.