[L Sarbren]

BAC BLANC / DÉC. 2006 / SPÉC.

énoncé en italique ***barème sur 5 points*** 1er bac blanc : semaine du 12 décembre 2005
d'après INDE2000 spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.a. *Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.* ***0,5point (0,25 si non justifié)***

$3^2 \equiv 9 \equiv 2$ (7) Or $3^3 = 3 \times 3^2$ donc $3^3 \equiv 3 \times 2 \equiv 6$ (7) De plus $3^4 \equiv 3^2 \times 3^2 \equiv 2 \times 2 \equiv 4$ (7)
De même $3^5 \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 5$ (7) Et $3^6 \equiv 3 \times 5 \equiv 15 \equiv 1$ (7)
Les entiers obtenus sont compris entre 0 et 7 exclu
D'où le tableau :

n	1	2	3	4	5	6
reste	3	2	6	4	5	1

b. *En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.* ***0,5point***

$3^{n+6} = 3^n \times 3^6$ .Or $3^6 \equiv 1$ (7) donc $3^{n+6} \equiv 3^n \times 1$ (7)
donc par définition des congruences, $\boxed{3^n \text{ et } 3^{n+6} \text{ ont le même reste dans la division par 7}}$

c. *A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.* ***0,5point***

$3^{1000} = 3^{6 \times 166+4} = (3^6)^{166} \times 3^4$
donc $3^{1000} \equiv 1^{166} \times 3^4 \equiv 4$ (7) d'après le 1.a.
donc $\boxed{3^{1000} \equiv 4 \ (7)}$

d. *De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne par 7 pour n quelconque ?.* ***1point***

De manière générale , soit r le reste de la division euclidienne de n par 6
Alors n=6q+r où q est le quotient entier
donc $3^n = 3^{6q+r} = (3^6)^q \times 3^r$ donc $3^n \equiv 1^q \times 3^r \equiv 3^r$ (7)
donc $\boxed{\text{le reste de la division de } 3^n \text{ par 7 est le même que celui de la division de } 3^r \text{ par 7 où r est le reste de la division euclidienne de n par 6}}$ (on utilise alors l'un des 6 résultats trouvés au 1.a.)

e. *En déduire que pour tout entier naturel n, 3^n n'est pas multiple de 7.* ***0,25point***

Donc , d'après 1.a., lorsqu'on divise 3^n par 7, les restes possibles sont 3 ;2 ;6 ;4 ;5 ou 1.
Le reste obtenu n'est donc jamais nul, donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel n, } 3^n \text{ n'est pas multiple de 7.}}$

2. *Soit $U_n = 1+3+3^2+ \dots +3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.*

a. *Montrer que $U_n = \dfrac{3^n-1}{2}$ puis que si . U_n est divisible par 7, alors 3^n-1 est divisible par 7.* ***0,25+0,5point***

Remarquons que U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3, donc $U_n = 1 \times \dfrac{1-3^n}{1-3} = \dfrac{3^n-1}{2}$, donc $\boxed{U_n = \dfrac{3^n-1}{2}}$

Donc $2U_n = 3^n-1$
Donc si U_n est divisible par 7, alors $U_n \equiv 0$ (7) donc $2U_n \equiv 2 \times 0$ (7) donc $3^n-1 \equiv 0$ (7)
donc 3^n-1 est divisible par 7.
donc $\boxed{\text{si . } U_n \text{ est divisible par 7, alors } 3^n-1 \text{ est divisible par 7}}$.

b. *Réciproquement, montrer que si 3^n-1 est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.* ***1point (dont « Gauss 0,25 et accepter « 2 premier avec 7 » sans justification)***

Réciproquement, supposons que 3^n-1 est divisible par 7, alors $2U_n$ est divisible par 7
Autrement dit, 7 divise $2U_n$, or 2 est premier avec 7 (car $1 \times 7 + (-3) \times 2 = 1$ et d'après une conséquence du théorème de Bézout), donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise U_n

donc on a montré que $\boxed{\text{si } 3^n-1 \text{ est divisible par 7, alors } U_n \text{ est divisible par 7}}$

c. *En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.* ***0,5point***

donc U_n est divisible par 7 ssi 3^n-1 est divisible par 7 ssi $3^n-1 \equiv 0$ (7) ssi $3^n \equiv 1$ (7)
ssi le reste de la division euclidienne de n par 6 vaut 0 d'après 1.a. et d.

donc $\boxed{U_n \text{ est divisible par 7 ssi n est un multiple de 6}}$

FIN