2) Exercice 2 :

Partie A – Étude de la fonction φ définie par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$

1. Limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty}$.

0,5 On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (2-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on est donc en présence d'une forme indéterminée (« $0 \times \infty$ »).

Pour tout réel x, $\varphi(x) = 2e^x - xe^x - 1$, on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1}$.

2. Étude de la fonction dérivée de φ

La fonction φ est la somme de la fonction $x \mapsto -1$ et de la fonction $x \mapsto (2-x)e^x$.

La première est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

La seconde est le produit d'une fonction polynôme $x \mapsto 2-x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction exponentielle elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$.

0,75 Pour tout réel x, on a $\varphi'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$.

On en déduit le tableau de variation de φ sachant que pour tout réel x, $e^x > 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

On a $\varphi(1) = e - 1$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi(0) = 1$,

$\varphi(-2) = \dfrac{4}{e^2} - 1 \approx -0{,}45866$.

3. La fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty\,; -2]$ on a $\varphi(-2) < 0$, donc φ est strictement négative sur $]-\infty\,; -2]$ donc φ ne s'annule pas sur $]-\infty\,; -2]$.

La fonction φ est strictement croissante et continue sur $[-2\,; 0]$, elle réalise donc une bijection de $[-2\,; 0]$ sur $[\varphi(-2)\,; \varphi(0)]$, on a $\varphi(-2) < 0$ et $\varphi(0) > 0$ donc le réel 0 appartient à $[\varphi(-2)\,; \varphi(0)]$; il existe donc un unique réel α appartenant à $[-2\,; 0]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

0,5 La fonction φ est strictement croissante sur $[0\,; 1]$, $\varphi(0) > 0$ donc la fonction φ est strictement positive et ne s'annule pas sur $[0\,; 1]$.

La fonction φ est strictement décroissante et continue sur $[1\,; 2]$, elle réalise donc une bijection de $[1\,; 2]$ sur $[\varphi(2)\,; \varphi(1)]$, on a $\varphi(2) < 0$ et $\varphi(1) > 0$ donc le réel 0 appartient à $[\varphi(2)\,; \varphi(1)]$; il existe donc un unique réel β appartenant à $[1\,; 2]$ tel que $\varphi(\beta) = 0$.

La fonction φ est strictement décroissante sur $[2\,; +\infty[$, $\varphi(2) < 0$ donc la fonction φ est strictement négative sur $[2\,; +\infty[$. D'où :

x	$-\infty$		-2		α		0		1		β		2		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

4. On a à l'aide de la calculatrice $\alpha \approx 1{,}1461932$ donc :

$$\boxed{-1{,}15 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}14}.$$

0,5 De même $\beta \approx 1{,}841\ 405\ 7$ donc $\boxed{1{,}84 \leqslant \beta \leqslant 1{,}85}$.

5. On a $\varphi(\alpha) = 0$ soit $(2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0$ ou encore $(2-\alpha)e^\alpha = 1$, le

0,25 réel α est différent de 2 car $\varphi(2) < 0$ donc $2 - \alpha \neq 0$ et $\boxed{e^\alpha = \dfrac{1}{2-\alpha}}$.

Partie B – Étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

1. Ensemble de définition de f

Pour tout réel x, soit u la fonction définie par $u(x) = e^x - x$.

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout réel x, $u'(x) = e^x - 1$ d'où le tableau de variation de u.

0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	1	$\nearrow$	

3

La fonction u admet un minimum absolu en 0 égal à 1, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) \geqslant 1$ et donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) \neq 0$.
La fonction f est le quotient de la fonction $x \mapsto e^x - 1$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction u qui est définie sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur $\mathbb{R}$, *la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.*

2. Limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x) = +\infty$ donc d'après les théorèmes du cours $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$.

0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ on est donc en présence d'une forme indéterminée. Pour tout réel x strictement positif $e^x - x = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$, on sait d'après le cours que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$. D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$, il y a une nouvelle forme indéterminée de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}}$ car le réel e^x est non nul pour tout x. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1$ car d'après le cours $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

3. Tableau de variation de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur étant non nul sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,

1

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-e^x x + 2e^x - 1}{(x - e^x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - e^x)^2}.$$

En utilisant le tableau de signes de la question **A. 3.** on obtient :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

4. Calcul de $f(\alpha)$

0,5

On a d'après la question **A. 5.** $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$, d'où :

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$$
$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2 - \alpha} - 1}{\frac{1}{2 - \alpha} - \alpha}$$
$$f(\alpha) = \frac{1 - (2 - \alpha)}{1 - \alpha(2 - \alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1}$$
$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2}$$

Le réel α est différent de 1 donc on peut simplifier par $\alpha - 1$ d'où :

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}}.$$

Exo 3 [NON SPÉCIALISTES] [5pts] | BAC BLANC / Déc. 2006.

1°) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \iff (z-\sqrt{3})^2 = -1 = i^2 \iff \begin{cases} z-\sqrt{3} = i \\ \text{ou} \\ z-\sqrt{3} = -i \end{cases} \iff \boxed{z = \sqrt{3}+i}$ ou $\boxed{z = \sqrt{3}-i}$ [0,5]

$a = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ [0,25]

$b = \sqrt{3}-i = \bar{a} = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ [0,25]

2°) a) $r = \mathrm{Rot}_{[O;\frac{\pi}{3}]}$ $A' = r(A) \iff a' = e^{i\frac{\pi}{3}}a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}+i)$

$a' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \iff \boxed{a' = 2i}$ [0,5]

b) $h = \mathrm{Hom}_{[O;-\frac{3}{2}]}$ $B' = h(B) \iff b' = -\frac{3}{2}b \iff b' = -\frac{3}{2}(\sqrt{3}-i)$

$\iff \boxed{b' = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$ [0,5]

3°) a) $c\bar{c} = |c|^2 = \|\vec{OC}\|^2 = R^2$ [0,25]

$(c-2i)(\bar{c}+2i) = (c-a')(\overline{c-a'}) = |c-a'|^2 = \|\vec{CA'}\|^2 = R^2$ [0,25]

$\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = (c-b')(\overline{c-b'}) = |c-b'|^2 = \|\vec{CB'}\|^2 = R^2$ [0,25]

b) $(c-2i)(\bar{c}+2i) = c\bar{c} + 2i(c-\bar{c}) - 4i^2$

$\iff R^2 = R^2 + 2i(c-\bar{c}) + 4 \iff 2i(c-\bar{c}) = -4 \iff \boxed{c-\bar{c} = 2i}$

CQFD [0,5]

$\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = c\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c}) + \frac{3}{2}i(c-\bar{c}) + 9$

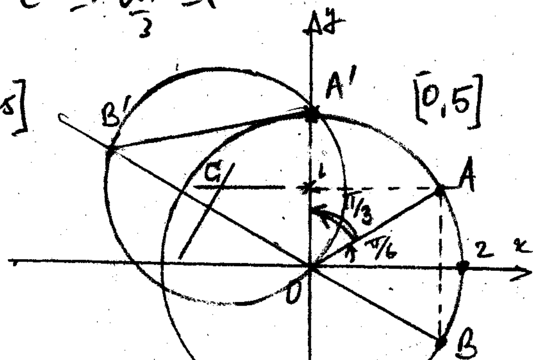
$\iff R^2 = R^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c}) + \frac{3}{2}i(2i) + 9$

$\iff \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c}) = -6 \iff \boxed{c+\bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}}$ CQFD [0,5]

c) $\begin{cases} c+\bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ c-\bar{c} = 2i \end{cases} \iff \begin{aligned} 2c &= -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2i \\ 2\bar{c} &= -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2i \end{aligned}$ | $\boxed{c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + i}$ [0,5]

$\bar{c} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - i$

$R = \|\vec{OC}\| = |c| = \sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{3}{3}} = \boxed{\sqrt{\frac{7}{3}}}$ [0,25]



Exercice 4 :

4

– Étude de deux suites

1. Étude de la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$

La fonction g est la composée de la fonction $g_1 : x \mapsto \frac{1}{2-x}$ et de la fonction ln. La fonction g_1 est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ et strictement positive sur $]-\infty\,;2[$, la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction g est donc définie sur $]-\infty\,;2[$.

La fonction g_1 est strictement croissante sur $]-\infty\,;2[$ et strictement positive sur $]-\infty\,;2[$ car inverse d'une fonction strictement positive et strictement décroissante sur $]-\infty\,;2[$, la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;2[$ (composée de fonctions strictement croissantes).

La fonction g_1 est continue et strictement positive sur $]-\infty\,;2[$, la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction g est continue sur $]-\infty\,;2[$ par « composition de fonctions continues ».

1

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variation de g dans lequel on a placé les réels -2 et 0 :

x	$-\infty$	-2	0	2
g	$-\infty$ ↗	$\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ↗	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ↗	$+\infty$

La fonction g est strictement croissante sur $I = [-2\,;0]$ donc pour tout x de I, on a $g(-2) \leqslant g(x) \leqslant g(0)$.

On a $g(-2) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 \approx -1{,}39$

et $g(0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \approx -0{,}69$ donc pour tout x de I on a $-2 \leqslant g(x) \leqslant 0$, donc $g(x) \in [-2\,;0]$ et donc *l'image de l'intervalle I est incluse dans I.*

2. a. Étude d'une suite (u_n)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

$u_1 = g(-2) = -\ln(4) \in [-2\,;0]$.

Raisonnons par récurrence :

- $u_0 = -2 \in [-2\,;0]$.
- Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n \in [-2\,;0]$.
- D'après la question précédente si $u_n \in [-2\,;0]$ alors $g(u_n) \in [-2\,;0]$, donc $u_{n+1} \in [-2\,;0]$.

0,5 Donc d'après le principe de récurrence, *pour tout entier naturel n, on a* $u_n \in [-2\,;0]$.

Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- $u_1 - u_0 = -\ln(4) + 2 \approx 0{,}6$ donc $u_1 - u_0 > 0$.
- Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
- La fonction g étant strictement croissante sur $[-2\,;0]$ et tous les u_n appartenant à cet intervalle $g(u_{n+1}) > g(u_n)$ soit $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} > u_n$, *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc croissante.*

b. Étude d'une suite (v_n)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

$v_1 = g(0) = -\ln(2) \approx -0{,}69$.

D'où en utilisant les valeurs approchées ($u_1 \approx -1{,}39$) :

$$-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0.$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

0,75

- On a $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$, la propriété est vraie au rang 1.
- Supposons qu'il existe un entier non nul n tel que :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

- La fonction g étant strictement croissante sur $[-2\,;0]$ on a :

$$g(-2) \leqslant g(u_n) \leqslant g(v_n) \leqslant g(v_{n-1}) \leqslant g(0).$$

Mais $g(-2) \geqslant -2$ et $g(0) \leqslant 0$ donc :

$$-2 \leqslant g(u_n) \leqslant g(v_n) \leqslant g(v_{n-1}) \leqslant 0.$$

Soit :

$$-2 \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 0.$$

Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\boxed{-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0}.$$

D'après les inégalités précédentes, on a pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n \leqslant v_{n-1}.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

0,75

3. a. Montrons que sur $\mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $m(x) = x - \ln(1+x)$.
La fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$m'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $m'(x) > 0$, la fonction m est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$.
Donc pour tout x de $\mathbb{R}_+$ on a $m(x) \geqslant m(0) = 0$ donc pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$x - \ln(1+x) \geqslant 0$$

ou encore :

$$\boxed{\ln(1+x) \leqslant x}.$$

0,5

b. Montrons que pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.

On a pour tout entier naturel n, u_n et v_n qui sont éléments de $[-2\,;0]$, donc les réels $2 - v_n$ et $2 - u_n$ sont strictement positifs d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= g(v_n) - g(u_n) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2-v_n}\right) - \ln\left(\frac{1}{2-u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{1}{2-v_n}}{\frac{1}{2-u_n}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2-u_n}{2-v_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2-v_n+v_n-u_n}{2-v_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2-v_n}{2-v_n} + \frac{v_n-u_n}{2-v_n}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)}.$$

On montre à la question **C. 2. b.** que pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$ et que $2 - v_n \geqslant 0$ donc pour tout entier naturel n, on a $\frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \geqslant 0$, donc d'après la question **C. 3. a.** :

0,5

$$\ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right) \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}.$$

et donc pour tout entier n,

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}}.$$

<u>Remarque</u>

Il faut montrer que pour tout entier n, $\frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \geqslant 0$ car on a démontré l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ sur $\mathbb{R}_+$.

On a successivement pour tout entier n,

$$-2 \leqslant v_n \leqslant 0$$
$$0 \leqslant -v_n \leqslant 2$$
$$2 \leqslant 2 - v_n \leqslant 4$$

0,25

Les trois membres de la dernière inégalité étant strictement positifs, leurs inverses sont dans l'ordre inverse d'où pour tout entier n :

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2 - v_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Le réel $v_n - u_n$ est positif pour tout entier n donc en multipliant les trois membres par ce réel positif :

$$\frac{v_n - u_n}{4} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}.$$

0,5

D'où pour tout entier n :

$$\ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right) \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)}.$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

- On a $v_0 - u_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 (v_0 - u_0)$, la propriété est donc vraie au rang 0.

(6)

• Supposons qu'il existe un entier n tel que $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

• D'après la propriété démontrée précédemment on a $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence :

0,5 $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

On a démontré que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n - u_n$ d'où :

$$\boxed{0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)}.$$

0,75 Le réel $\frac{1}{2}$ étant strictement compris entre -1 et 1 on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
Donc d'après le théorème d'encadrement la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite et cette limite est nulle.
En résumé la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0, *les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles sont donc toutes les deux convergentes et elles ont la même limite.*