I - Calcul d'Intégrales.

1°) $g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ $\boxed{x > 1}$.

a) $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{a(x^2-1) + bx(x-1) + c(x+1)x}{x(x^2-1)}$.

$\iff (a+b+c)x^2 + (c-b)x + (-a) = 1$ pour tout $x > 1$

$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ c-b = 0 \\ a = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}}$

b) $G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + k$. $(x>1)$ Primitive de g.

2°) $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ a pour Primitive $F(x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$ (forme $\dfrac{u'}{u^2} = \left(-\dfrac{1}{u}\right)'$)

3°) $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x^2-1}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{-1}{x(x^2-1)}dx$

$\uparrow -\dfrac{1}{(x^2-1)}$ $\quad \downarrow \dfrac{1}{x}$

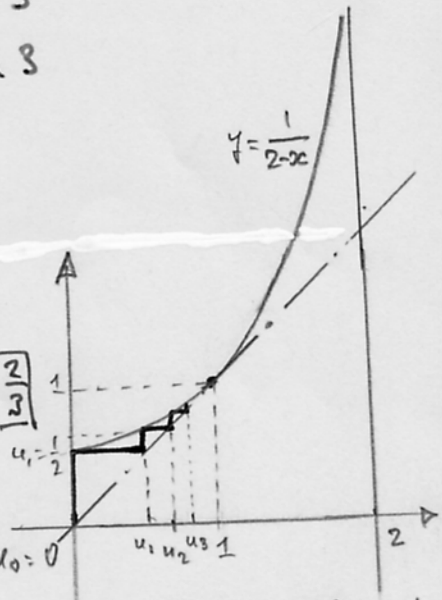
$= \left[\dfrac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3 + \left[G(x)\right]_2^3$

$\iff I = \left[\dfrac{-\ln x}{x^2-1} - \ln x + \dfrac{\ln}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}\ln(x+1)\right]_2^3$

$\iff I = \left(-\dfrac{\ln 3}{8} - \ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 4\right) - \left(-\dfrac{\ln 2}{3} - \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 1 + \dfrac{1}{2}\ln 3\right)$

$\iff I = \left(\dfrac{1}{2} + 1 + 1 + \dfrac{1}{3}\right)\ln 2 - \left(\dfrac{1}{8} + 1 + \dfrac{1}{2}\right)\ln 3$

$\iff \boxed{I = \dfrac{17}{6}\ln 2 - \dfrac{13}{8}\ln 3} \simeq 2,6 > 0$



III - Etude d'une SUITE Numérique

1°) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ $\Big|$ $u_1 = \dfrac{1}{2-u_0} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ $\quad u_2 = \dfrac{1}{2-u_1} = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

$u_3 = \dfrac{1}{2-u_2} = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

D'après la fig. $u_0 = 0$ $\lim u_n = 1$

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2} > 0$ $f \nearrow [0,2[$

b) $W_n = \dfrac{n}{n+1} \Rightarrow W_0 = 0 = u_0$, $W_1 = \frac{1}{2} = u_1$ $\Big|$ $W_2 = \dfrac{2}{3} = u_2$, $W_3 = \dfrac{3}{4} = u_3$

c) Soit (H_n) la relation $\boxed{u_n = W_n}$. INIT : $(H_0) \iff u_0 = W_0$ VRAI

$(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$? en effet $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{1}{2-W_n} = \dfrac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = W_{n+1}$ CQFD

Donc (H_n) Vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \longrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \ln\frac{1}{2} + \dots + \ln\dfrac{n}{n+1} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dots\times\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \longrightarrow \boxed{-\infty}$

Exercice N°2 Résolution de l'équation | Term. S4 / C6 / 18.01.05

(2/3)

(E) $\boxed{x^y = y^x}$ $x>0$, $y>0$

1°) (E) $\iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \iff y\ln x = x \ln y \iff \boxed{\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}}$.

2°) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\boxed{x>0}$.

a) on rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ (la fonction puissance emporte sa limite au logarithme dans le quotient.)

$\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \lim\limits_{x\to0^+}(\ln x) = (+\infty)\times(-\infty) = \boxed{-\infty}$.

$\mathcal{C}$ admet donc 2 asymptotes : $y=0$ $(O\vec{x})$ en $+\infty$ et $x=0$ $(O\vec{y})$ en 0^+.

b) $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ donc $\mathrm{Sgn}[h'(x)] = \mathrm{Sgn}[1-\ln x]$.

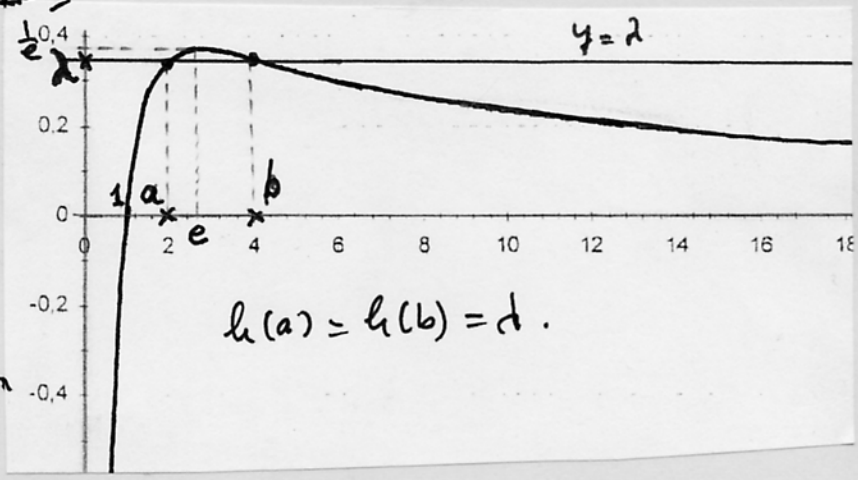
or $1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff \ln x < \ln e \iff \boxed{x<e}$ car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où le tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
h	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	M	$\searrow 0^+$

$x_0 = e$ abscisse du maximum

$M = h(x_0) = h(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e} \simeq 0{,}4$



c) $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff \boxed{x=1}$

3°) Quel que soit $\alpha \in]0;\frac{1}{e}[$ il existe un réel unique $a \in]1;e[$ car sur cet intervalle la fonction h est continue et strictement monotone donc définit une BIJECTION de $]1;e[$ sur son image $]0;\frac{1}{e}[$ donc tout $\alpha \in]0;\frac{1}{e}[$ admet un antécédent unique par h sur $]0;\frac{1}{e}[$. De même h est elle continue et strictement monotone (décroissante) sur $]e;+\infty[$ et donc définit une 2e bijection de $]e;+\infty[$ sur $]0;\frac{1}{e}[$ et donc $\alpha \in]0;\frac{1}{e}[$ admet un autre antécédent unique b sur $]e;+\infty[$. Ainsi $h(a) = h(b) = \alpha$.

Ainsi $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b} \iff a^b = b^a$ donc $(a;b)$ sol de (E) de même que $(b;a)$

4°) D'après la figure en faisant varier α de 0 à $\frac{1}{e}$ on obtient que :

s étant l'application $\begin{cases} [1;e] \longrightarrow [0;e] \\ a \longmapsto b \end{cases}$ tel que $h(b) = h(a)$. On pose $b = s(a)$

a) $\lim\limits_{a\to1^+} s(a) = +\infty$

b) $\lim\limits_{a\to e^-} s(a) = e$

c)

a	1	e
$b=s(a)$	$+\infty$ $\searrow$	e

Quand a varie de 1 à e, b varie de à e donc $s \searrow$

5°) le seul entier compris entre 1 et e est 2 et son image par s est 4 car $h(2) = \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{2\ln 2}{4} = \dfrac{\ln 4}{4} = h(4)$ les couples solution sont donc exclusivement $(2;4)$ et $(4;2)$ $\boxed{2^4 = 4^2} = 16$.

Exo IV Etude fonction et calcul d'aire

$\boxed{f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}}$ $(x \in \mathbb{R})$

1°) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ car $e^x \to +\infty$ et $\frac{2}{e^x+1} \to 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty}(x+\ln 4) = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ car $e^x \to 0$ et $\frac{2}{e^x+1} \to 2 \Rightarrow \lim\limits_{-\infty} f = \lim(x+\ln 4+2) = -\infty$

2°) $f(x)+f(-x) = 2\ln 4 + 2\left[\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{e^{-x}+1}\right] = 2\ln 4 + 2\left[\frac{e^{-x}+1+e^x+1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\right]$

or $e^{+x}\cdot e^{-x} = e^0 = 1$ donc $(e^x+1)(e^{-x}+1) = e^x+e^{-x}+2$ et par suite

$f(x)+f(-x) = 2\ln 4 + 2\times 1 \iff \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \boxed{1+\ln 4}$.

On en déduit que le point $A(0;1+\ln 4)$ est CENTRE de SYMÉTRIE de $\mathcal{C}$.

3°) $f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc f strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$

(croissante) sur $]-\infty;+\infty[$

4°) f CONTINUE et STRICTEMENT MONOTONE (croissante) sur $]-\infty;+\infty[$.

a) définit une BIJECTION de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

Par suite tout Nb Réel m admet un ANTÉCÉDENT unique sur $\mathbb{R}$.

i.e l'équation $f(x) = m$ admet une sol. unique.

b) $f(x) = 3$ admet pour solution unique $a \in]1,1;1,2[$

car $f(1,1) \simeq 2,98$ et $f(1,2) \simeq 3,09$.

c) Par symétrie / $A(0;1+\ln 4)$ on a $\frac{f(-a)+f(a)}{2} = 1+\ln 4$

donc $f(-a) = 2+2\ln 4 - f(a) = 2+2\ln 4 - 3 = 2\ln 4 - 1$

Ainsi $f(a) = 3 \iff f(-a) = 2\ln 4 - 1$ donc le nombre m cherché est $\boxed{2\ln 4 - 1}$. $\iff m \simeq 1,7$

5°) $\lim\limits_{+\infty}[f(x)-(x+\ln 4)] = \lim\limits_{+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0^+ \iff (\Delta)\ y = x+\ln 4$ ASYMPTOTE à $\mathcal{C}$ en $\boxed{+\infty}$ (AU DESSUS)

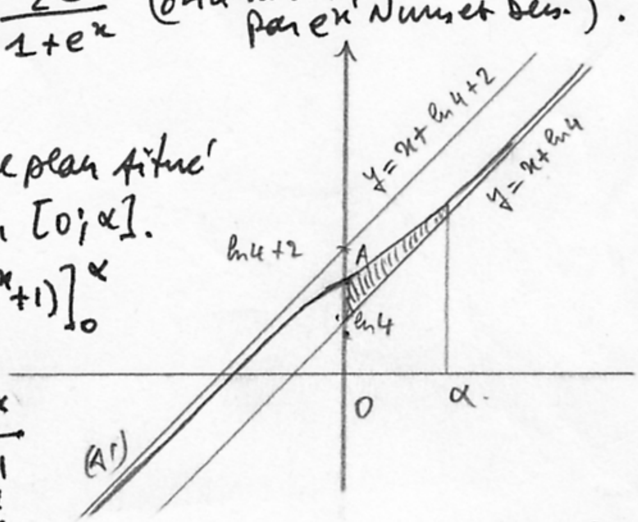
b) $\lim\limits_{-\infty}[f(x)-(x+2+\ln 4)] = \lim\limits_{-\infty}\left[-\frac{2e^x}{e^x+1}\right] = 0^- \iff (\Delta')$ ASYMPTOTE à $\mathcal{C}$ en $\boxed{-\infty}$ (AU DESSOUS).

• $f(x)+f(-x) = 2+2\ln 4 \iff f(x) = 2+2\ln 4 - f(-x) = 2+2\ln 4 - \left[-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}\right]$

d'où le résultat : $f(x) = x+\ln 4+2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ (on a multiplié la fraction par e^x Num et Den).

6°) $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x)-(x+\ln 4)]\,dx$

a) Ia représente une mesure en U.A. du domaine plan situé entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'asymptote (Δ) sur $[0;\alpha]$.



b) $I(\alpha) = \int_0^\alpha \left(2 - 2\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = 2\left[x - \ln(e^x+1)\right]_0^\alpha$

Donc $I(\alpha) = 2\alpha - 2\ln(e^\alpha+1) + 2\ln 2$

$= 2\left[\ln e^\alpha + \ln 2 - \ln(e^\alpha+1)\right] = 2\ln\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}$

c) $I(\alpha) = 1 \iff \ln\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{1}{2} = \ln e^{\frac{1}{2}} \iff \frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1} = e^{\frac{1}{2}}$

$\iff 2e^\alpha = e^\alpha\sqrt{e} + \sqrt{e} \iff e^\alpha(2-\sqrt{e}) = \sqrt{e} \iff e^\alpha = \frac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}} \iff \alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2-\sqrt{e})$ $\boxed{\alpha \simeq 1,5}$