Construction de la fonction Exponentielle

I – 1ère approche : **Recherche d'une fonction f dérivable sur R, qui transforme toute suite arithmétique en suite géométrique, et telle que f(0) = 1.**

Soit donc $\mathbf{U_n = a + n.r}$ une suite arithmétique de premier terme $\mathbf{U_0 = a}$ et de raison **r**.
On pose $\mathbf{V_n = f(U_n),\ V_0 = f(U_0) = f(a) = \alpha}$
$(\mathbf{V_n})$ étant géométrique par hypothèse, il existe nécessairement un nombre q tel que
$\mathbf{V_{n+1} = q\ V_n}$, c'est à dire $\mathbf{f(U_{n+1}) = q\ f(U_n)}$ ou $\mathbf{f[a+ (n+1)r\,] = q.f(a + n.r)}$, on en déduit immédiatement que $\mathbf{f(a + nr) = \alpha q^n}$ puisque $\mathbf{V_n = \alpha q^n}$
et en particulier pour n = 1 , $\mathbf{f(a + r) = q\ f(a)}$.
De plus cette relation doit être vraie par hypothèse quelque soit **a** et donc en particulier pour **a = 0**. On en déduit immédiatement que $\mathbf{f(r) = q.f(0) = q}$ et finalement on a donc pour tout **a** et tout **r**,

$$\mathbf{f(a + r) = q\alpha = \alpha q = f(a).f(r)}.$$

D'une manière générale la fonction cherchée vérifie donc nécessairement la relation

$$\boxed{\mathbf{f(u + v) = f(u).f(v)}}$$

C'est à dire que la fonction cherchée transforme nécessairement les sommes en produits, et donc les produits en puissance (du moins les produits de la forme n.r avec n entier naturel)
En effet $\mathbf{f(nr) = f(r + r + \ldots + r) = f(r).\ f(r).\ \ldots\ f(r) = [f(r)]^n}$
D'autre part on rappelle que pour tous entiers relatifs m et n, la relation sur les puissances donne :

$$\mathbf{q^{m+n} = q^m.q^n \text{ et } (q^m)^n = q^{m.n}}$$

C'est à dire que si l'on pose $\mathbf{\phi(m) = q^m}$ **on obtient** $\mathbf{\phi(m + n) = \phi(m).\phi(n)}$
On interprète cette relation en disant que la fonction ϕ joue le rôle d'une « exponentiation » (de base q) qui satisfait bien la loi de transformation des sommes en produit, d'où le nom de fonction Exponentielle donné à la fonction **f** définie ci-dessus.

II- 2e approche : **Recherche d'une fonction f dérivable sur R, qui réponde aux conditions suivantes :** $\boxed{\mathbf{f' = f}}$ (i.e. f '(x) = f(x) pour tout x Réel) et $\boxed{\mathbf{f(0)=1}}$
Dans l'équation fonctionnelle f ' = f l'inconnue est la fonction f et non la variable x, on dit qu'il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants.
Quelque soit a Réel on peut écrire la relation de définition de la différentielle de f en a :

$$\mathbf{f(a + h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon(h)} \text{ avec la condition } \varepsilon(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

ce qui, compte tenu de l'équation différentielle et en négligeant la quantité h.ε(h)
donne la relation : $\mathbf{f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) = (1+ h).f(a)}$ *(car par hyp. f '(a) = f(a))*
On se propose de construire la courbe représentative de f point par point à l'aide de cette relation.
C'est ce que l'on appelle la **Méthode d'Euler**.
On part donc de la valeur supposée connue de f(a) et on obtient les valeurs suivantes par l'*incrémentation* h supposée très petite.
En pratique on prendra d'abord h = 0,1 puis h = 0,01
Ainsi on a de même :

$$\mathbf{f(a + 2h) = f[(a +h) + h] \approx (1+h).f(a+h) = (1+h)^2 . f(a).}$$

et par récurrence immédiate :

$$\mathbf{f(a + nh) \approx (1+h)^n . f(a)} \qquad \mathbf{(1)}$$

donc avec **a = 0 et f(0) = 1** $\qquad \mathbf{f(n.h) \approx (1 + h)^n} \qquad \mathbf{(2)}$

C'est la suite de ces valeurs que l'on va construire avec un tableur pour obtenir la représentation graphique cherchée.
On remarque au passage que la relation **(1)** se traduit par le fait que la suite arithmétique $\mathbf{U_n = a + n.h}$ est transformée par f en une suite géométrique $\mathbf{V_n = \alpha(1 + h)^n}$ de raison **q = 1+h** et de 1er terme $\mathbf{\alpha=f(a).}$
Le fait que q = 1 + h correspond comme dans la première approche à **f(h) = q**, avec r = h. En effet pour a = 0 et n = 1 la relation (2) nous donne bien **f(h) = 1+h**. Il s'agit donc bien d'une fonction qui transforme les suites arithmétiques en géométriques.

D'autre part on constate que si l'on prend **h = 1/n** avec **n très grand** la relation précédente nous donne : $\mathbf{f(1) = f(n\,.\,\frac{1}{n}) \approx (1 + \frac{1}{n})^n}$ en particulier pour **n = 100** on trouve $\mathbf{f(1) \approx 2{,}7182818}$

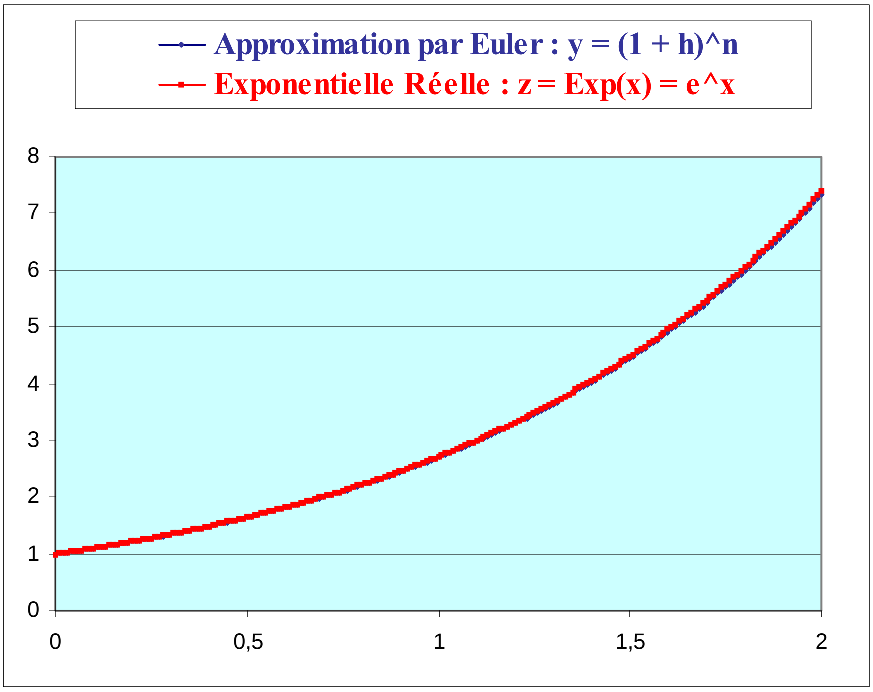
Par définition on appelle **e** ce nombre qui est la **limite** de $\mathbf{(1 + \frac{1}{n})^n}$ quand $\mathbf{n \to \infty}$.

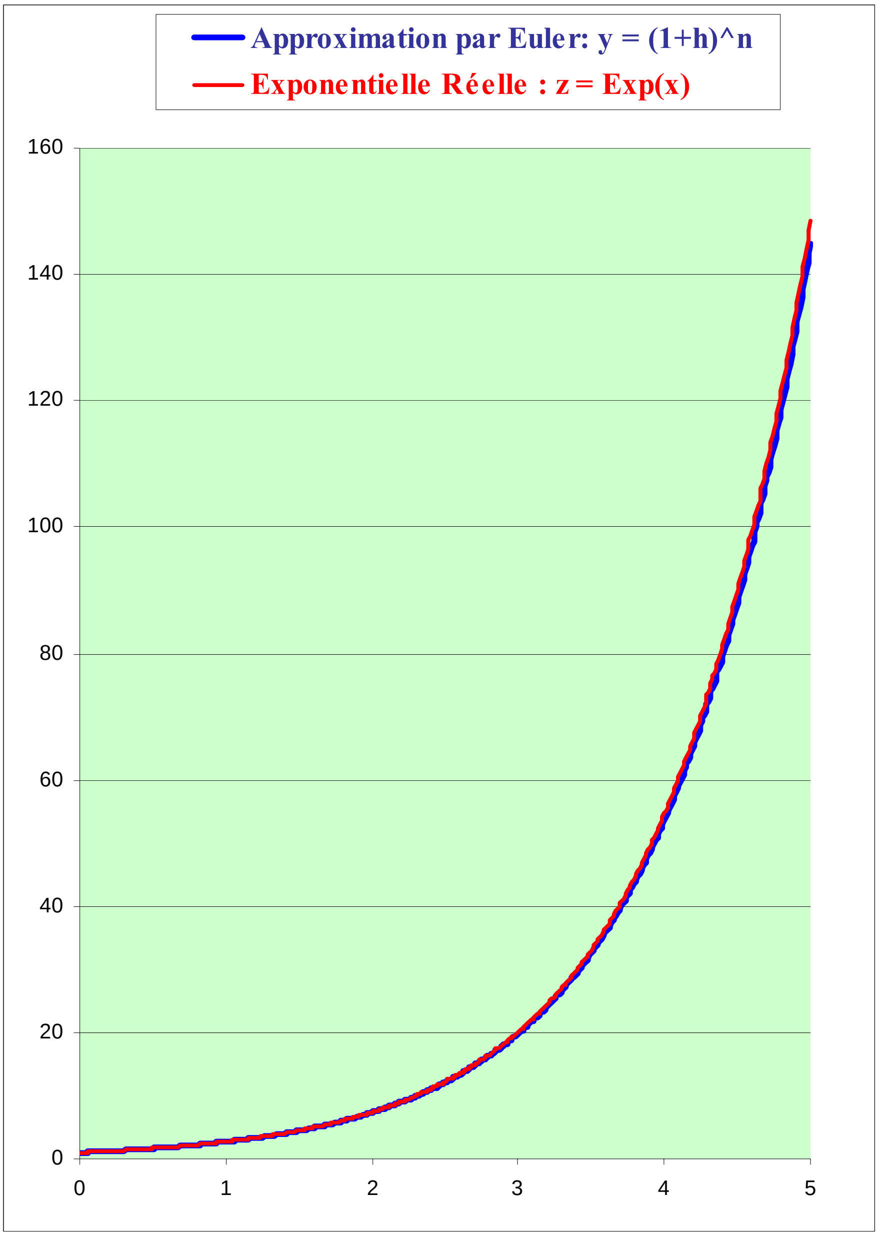
Ainsi, pour les très grandes valeurs de n, $\mathbf{f(x) = f(n.\frac{x}{n}) \approx (1 + \frac{x}{n})^n = [(1 + \frac{1}{n/x})^{n/x}]^x \approx e^x}$ noté ***Exp(x).***

III - Représentation graphique :

h = 0,01

n	x	y = (1 + h)^n	z = Exp(x)
0	0	1	1
1	0,01	1,01	1,010050167
2	0,02	1,0201	1,02020134
3	0,03	1,030301	1,030454534
4	0,04	1,04060401	1,040810774
5	0,05	1,05101005	1,051271096
6	0,06	1,061520151	1,061836547
7	0,07	1,072135352	1,072508181
8	0,08	1,082856706	1,083287068
9	0,09	1,093685273	1,094174284
10	0,1	1,104622125	1,105170918
11	0,11	1,115668347	1,11627807
12	0,12	1,12682503	1,127496852
13	0,13	1,13809328	1,138828383
14	0,14	1,149474213	1,150273799
15	0,15	1,160968955	1,161834243
16	0,16	1,172578645	1,173510871
17	0,17	1,184304431	1,185304851
18	0,18	1,196147476	1,197217363
19	0,19	1,20810895	1,209249598
20	0,2	1,22019004	1,221402758
21	0,21	1,23239194	1,23367806
22	0,22	1,24471586	1,246076731
23	0,23	1,257163018	1,25860001
24	0,24	1,269734649	1,27124915
25	0,25	1,282431995	1,284025417
26	0,26	1,295256315	1,296930087
27	0,27	1,308208878	1,309964451
28	0,28	1,321290967	1,323129812
29	0,29	1,334503877	1,336427488
30	0,3	1,347848915	1,349858808
31	0,31	1,361327404	1,363425114
32	0,32	1,374940679	1,377127764
33	0,33	1,388690085	1,390968128
34	0,34	1,402576986	1,404947591
35	0,35	1,416602756	1,419067549
36	0,36	1,430768784	1,433329415
37	0,37	1,445076471	1,447734615
38	0,38	1,459527236	1,462284589
39	0,39	1,474122509	1,476980794
40	0,4	1,488863734	1,491824698
41	0,41	1,503752371	1,506817785
42	0,42	1,518789895	1,521961556
43	0,43	1,533977794	1,537257524
44	0,44	1,549317572	1,552707219
45	0,45	1,564810747	1,568312185
46	0,46	1,580458855	1,584073985
47	0,47	1,596263443	1,599994193
48	0,48	1,612226078	1,616074402
49	0,49	1,628348338	1,63231622
50	0,5	1,644631822	1,648721271
51	0,51	1,66107814	1,665291195
52	0,52	1,677688921	1,68202765
53	0,53	1,694465811	1,698932309
54	0,54	1,711410469	1,716006862
55	0,55	1,728524573	1,733253018
56	0,56	1,745809819	1,7506725
57	0,57	1,763267917	1,768267051
58	0,58	1,780900597	1,786038431
59	0,59	1,798709603	1,803988415
60	0,6	1,816696699	1,8221188
61	0,61	1,834863666	1,840431399
62	0,62	1,853212302	1,858928042
63	0,63	1,871744425	1,877610579
64	0,64	1,890461869	1,896480879
65	0,65	1,909366488	1,915540829
66	0,66	1,928460153	1,934792334
67	0,67	1,947744755	1,954237321
68	0,68	1,967222202	1,973877732
69	0,69	1,986894424	1,993715533
70	0,7	2,006763368	2,013752707
71	0,71	2,026831002	2,033991259
72	0,72	2,047099312	2,054433211
73	0,73	2,067570305	2,075080608
74	0,74	2,088246008	2,095935514
75	0,75	2,109128468	2,117000017
76	0,76	2,130219753	2,13827622
77	0,77	2,151521951	2,159766254
78	0,78	2,17303717	2,181472265
79	0,79	2,194767542	2,203396426
80	0,8	2,216715217	2,225540928
81	0,81	2,238882369	2,247907987
82	0,82	2,261271193	2,270499838
83	0,83	2,283883905	2,29331874
84	0,84	2,306722744	2,316366977
85	0,85	2,329789971	2,339646852
86	0,86	2,353087871	2,363160694
87	0,87	2,37661875	2,386910854
88	0,88	2,400384937	2,410899706
89	0,89	2,424388787	2,435129651
90	0,9	2,448632675	2,459603111
91	0,91	2,473119001	2,484322533
92	0,92	2,497850191	2,50929039
93	0,93	2,522828693	2,534509178
94	0,94	2,54805698	2,559981418
95	0,95	2,57353755	2,585709659
96	0,96	2,599272926	2,611696473
97	0,97	2,625265655	2,637944459
98	0,98	2,651518311	2,664456242
99	0,99	2,678033494	2,691234472
100	**1**	**2,704813829**	**2,7182818**





On constate dans les graphiques obtenus à l'aide d'un tableur avec **h = 0,01** que la courbe obtenue par la méthode d'Euler et la courbe représentant la fonction Exponentielle définie mathématiquement, sont pratiquement confondues, ce qui justifie *a priori* la construction et les conjectures faites sur la fonction cherchée.

IV – Définition formelle et propriétés de l'Exponentielle.

Soit f une fonction dérivable sur R ayant les propriétés suivantes : quelque soient les nombres Réels u et v : **f(u + v) = f(u).f(v)** **(*)** **et** **f(u) ≠ 0** pour au moins un Réel **u**

Nous allons démontrer que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

1°) **f(x) ≠ 0** pour tout x ∈ R.

2°) **f(0) = 1**

3°) **f (x) > 0** pour tout x ∈ R.

4°) Si l'on suppose que **f '(0) = k**, alors on a **f '(x) = k.f(x)** pour tout x ∈ R.

Démos : 1°) Raisonnement par l'absurde : s'il existait un nombre v tel que f(v) = 0 alors on aurait f(x + v) =f(x).f(v) = f(x).0 = 0 pour tout x et en particulier pour x = u-v et l'on aurait donc f(u) = f(u-v+v)= 0 ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc f(x) ne peut jamais s'annuler.

2°) En prenant u = v = 0, on a : f(0 + 0) = f(0).f(0) donc $f(0) = f(0)^2$ donc f(0) = 0 ou f(0) =1 Or il est impossible que f(0) = 0 car f ne peut jamais s'annuler.

3°) $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2$ *donc f(x) > 0 quelque soit x ∈ R.*

4°) Soit a fixé, et F(x) = f(a + x) – f(a).f(x) , d'après (1) on a évidemment F(x) = 0 pour tout x. Par suite F'(x)= f '(a + x) – f(a).f '(x) , et F'(x) = 0 donc f '(a + x) = f(a).f '(x) pour tout x et pour tout a fixé. Donc en particulier pour x = 0 on a f '(a) = f(a).f '(0) = k.f(a). donc on a bien quelque soit a, f '(a) = k. f(a) ou pour tout x , f '(x) = k.f(x). C.Q.F.D.

Réciproquement : on peut démontrer que si une fonction est dérivable sur R et possède les propriétés suivantes **:** $\boxed{f' = k.f \quad et \quad f(0) = 1}$ alors la relation (*) est satisfaite.

Démo : 1°) On a évidemment f '(0) = k f(0) = k .

2°) On pose F(x) = f(x + a) . f(-x) ,
alors F'(x) = f '(x + a) . f(-x) + f(a + x) .[- f'(-x)]
(dérivée d'un produit et d'une fonction composée)
Donc F'(x) = k.f(x+a) .f(-x) - k.f(x + a). f(-x) donc F'(x) = 0 pour tout x ∈ R..
Par suite F(x) = Constante. Donc F(x) = F(0) = f(a).f(0). = f(a) pour tout x ∈ R..
Ainsi on a pour tout x ∈ R., f(x + a) . f(-x) = f(a).

3°) On en déduit que pour tout x ∈ R., en prenant a = 0 , f(x). f(-x) = f(0) = 1

4°) De la relation précédente on déduit que f(x) est toujours différent de 0.

5°) Enfin en multipliant les deux membres de l'égalité f(x + a) . f(-x) = f(a) par f(x) on obtient f(x + a) = f(x) . f(a) quelque soit x et quelque soit a.
C'est à dire que quelque soient u et v ∈ R., on a bien $\boxed{f(u + v) = f(u).f(v)}$ *C.Q.F.D.*

Existence et Unicité : la fonction f que l'on cherche a les propriétés indiquées mais rien ne prouve formellement qu'une telle fonction existe, on peut seulement la tracer approximativement point par point.
L'expression f(x) = e^x *obtenue pour k= 1 avec* **e = 2,718…** ne permet pas de savoir comment calculer une valeur quelconque de f(x) et d'ailleurs cette expression n'est pas formellement acquise.
Dans la suite, on admettra qu'une telle fonction **existe** mathématiquement et possède toutes les propriétés.
Cependant on peut établir formellement qu'une telle fonction est nécessairement **unique** :
en effet si f_1 est une fonction vérifiant les mêmes propriétés que f alors en posant :
$P(x) = f(x).f_1(-x)$ on aurait $P'(x) = f'(x).\, f_1(-x) – f(x).f_1'(-x) = k.f(x).f_1(-x) – k.f(x).f_1(-x) = 0$.
Donc P(x) = Constante = P(0) = $f(0).f_1(0)$ = 1 donc P(x) = 1 pour tout x ∈ R. et par suite $f(x).f_1(-x) = 1$ d'où en multipliant les deux membres par $f_1(x)$ on obtient pour tout x ∈ R, $f(x) = f_1(x)$, i.e. $f = f_1$.

V – Limites et Variations de l'Exponentielle de base e. ♥ ♥ ♥

Ayant admis l'existence de cette fonction unique ayant les propriétés précédentes il existe en particulier une unique fonction ayant les propriétés : (pour **k = 1**).

$\boxed{f' = f}$, $\boxed{f(0) = 1}$ et $\boxed{f(u+v) = f(u).f(v)}$

On appelle cette unique fonction : Exponentielle de base **e**

On note cette fonction **Exp.** et l'on écrit f(x) = **Exp(x) ou e^x** .

Ainsi les formules deviennent elles $\boxed{(e^x)' = e^x}$, $\boxed{e^0 = 1}$, $\boxed{e^{u+v} = e^u . e^v}$, $\boxed{e^{-u} = \frac{1}{e^u}}$, $\boxed{e^{nu} = (e^u)^n}$

De plus puisque $\mathbf{e^x > 0}$ on a également $\mathbf{(e^x)' > 0}$ d'où **Exp croissante** strictement sur R

1°) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$ Car on montre que $\mathbf{e^x > x}$ pour tout $x \in R$, donc si $x \to +\infty$, $\mathbf{e^x} \to +\infty$.

En effet on pose $u(x) = e^x - x$, d'où $u'(x) = e^x - 1$ donc pour $x > 0$ $u'(x) > 0$ car $e^x > e^0$

Et comme $u(0) = 1 > 0$, u croissante strictement sur R_+ donc $u(x) > u(0)$ d'où $u(x) > 0$, cqfd.

2°) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$ Car $\mathbf{e^x} = \frac{1}{\mathbf{e^{-x}}}$ donc lorsque $x \to -\infty$, on a $(-x) \to +\infty$, d'où $\mathbf{e^{(-x)}} \to +\infty$.

3°) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ car on sait que pour tout x on a $\mathbf{e^x > x}$ donc $\mathbf{e^{x/2} > x/2}$

d'où $[\mathbf{e^{x/2}}]^2 > \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}}$ et donc $\mathbf{e^x} > \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}}$ d'où $\frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{x}} > \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{4}}$ d'où le résultat.

4°) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} x.e^x = 0}$ car $\mathbf{e^x} = \frac{1}{\mathbf{e^{-x}}}$ d'où $\mathbf{xe^x} = \mathbf{x}\ \frac{1}{\mathbf{e^{-x}}} = -\frac{\mathbf{(-x)}}{\mathbf{e^{(-x)}}}$

Or $(-x) \to +\infty$ donc $\frac{\mathbf{e^{(-x)}}}{\mathbf{(-x)}} \to +\infty$ d'où $\frac{\mathbf{(-x)}}{\mathbf{e^{(-x)}}} \to 0$, d'où le résultat.

5°) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$ car $\frac{\mathbf{e^x - 1}}{\mathbf{x}}$ est le taux d'accroissement de Exp entre 0 et x (Exp 0 = 1)

Donc sa limite est la dérivée de Exp en 0 c'est à dire Exp(0) = 1. cqfd.

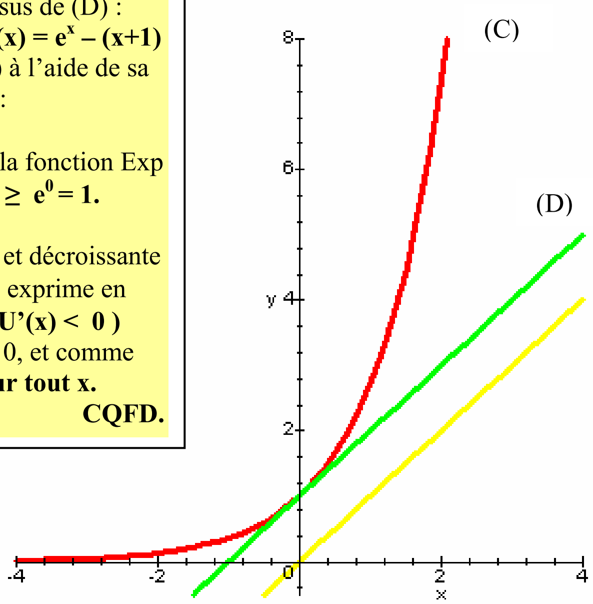
VI - **Courbe :** on observera que toute la courbe (C) est située au dessus de l'axe Ox, et au dessus de la droite (D) y = x + 1, tangente au point (0 ;1) est (parallèle à la 1ère bissectrice).

Pour prouver que (C) est au dessus de (D) :
On pose comme d'habitude : $\mathbf{U(x) = e^x - (x+1)}$
On étudie les variations de **U(x)** à l'aide de sa dérivée et on en déduit le signe :

$\mathbf{U'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0}$ car la fonction Exp est croissante donc $\mathbf{x \geq 0} \Leftrightarrow \mathbf{e^x \geq e^0 = 1}$.

Donc U croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$ (l'équivalence $\Leftrightarrow$ exprime en effet par négation que $\mathbf{x < 0 \Leftrightarrow U'(x) < 0}$)
Par suite U(x) est **minimum** en 0, et comme **U(0) = 0** on a bien **U(x) ≥ 0 pour tout x.**

CQFD.



VII – **Propriétés Géométriques de la courbe de l'Exponentielle.**

1°) On appelle « **sous-tangente** » à une courbe donnée la longueur de l'intervalle déterminé par l'intersection $\mathbf{x_T}$ de la tangente en un point avec l'axe Ox et l'abscisse $\mathbf{x_0}$ du point considéré.

Sur la figure ci-contre on désigne par ST la sous-tangente à (C). $\mathbf{ST = |\,x_0 - x_T\,|}$

L'équation de la tangente en $M_0\,(x_0\,;y_0)$ est

$y = f\,'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$.

C'est à dire : $y = \mathbf{e}^{x_0}\,(x - x_0) + \mathbf{e}^{x_0}$

$$\boxed{\mathbf{y = e^{x_0}\,(x - x_0 + 1)}}$$

Donc pour y = 0 on a

$e^{x_0}\,(x - x_0 + 1) = 0$,

mais comme $e^{x_0} \neq 0$,

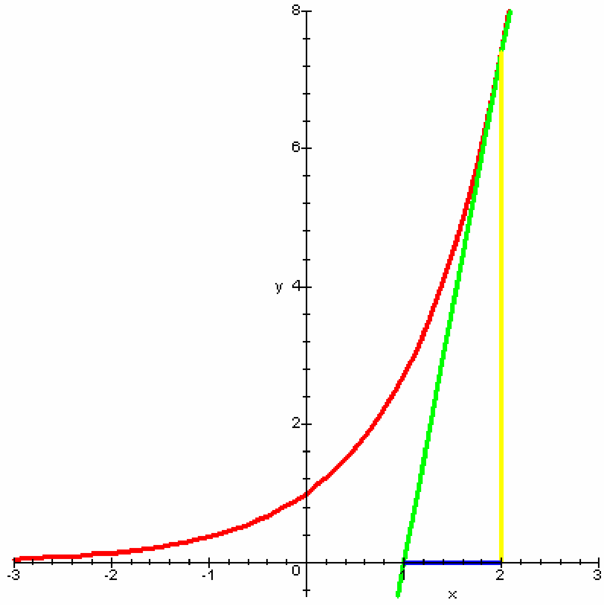
on en déduit que $x = x_T = x_0 - 1$

d'où $x_0 - x_T = 1$, c'est à dire $\boxed{\mathbf{ST = 1}}$

Ainsi pour l'exponentielle la sous-tangente est-elle toujours égale à 1.

Ceci est une propriété caractéristique de la croissance exponentielle.

En effet on peut démontrer que réciproquement (exercice à faire !) si la sous-tangente à une courbe est constante alors la fonction associée est de la forme $y = Ae^{x}$.



2°) Une autre caractéristique de la croissance d'une fonction exponentielle est le fait que **le taux d'accroissement** d'une unité pris à partir d'un point donné quelconque de la courbe **est proportionnel à l'ordonnée** de ce point. Soit donc $\mathbf{x = x_0 + 1}$, on a donc :

$$\mathbf{\frac{y - y_0}{x - x_0} = e^{x_0+1} - e^{x_0} = e^{x_0}(e - 1) = q.\,y_0}$$ quelque soit x_0 avec $\mathbf{q = e - 1 = 1{,}7\ldots > 1}$.

C'est à dire que plus l'ordonnée est élevée plus l'accroissement correspondant est grand.

Le professeur Shaddocko dirait *« plus çà monte haut plus çà monte vite ».*

VIII - **Exponentielle de base a quelconque (a > 0)**

L'hypothèse de départ $\boxed{f\,'(x) = k.f(x) \text{ et } f(0)=1}$ *conduit (*) à la relation* $\boxed{f(x) = \mathbf{e}^{kx} = \mathbf{a}^{x}}$ avec $a = \mathbf{e}^{k}$

Donc par définition du logarithme népérien k = ln(a), (voir plus loin) on en déduit immédiatement :

$$\boxed{(\mathbf{a}^{x})' = (\mathbf{e}^{kx})' = k.\,\mathbf{e}^{kx} = k.\,\mathbf{a}^{x} = \ln(a).\,\mathbf{a}^{x}}$$

(*) l' équivalence sera démontrée p.6.

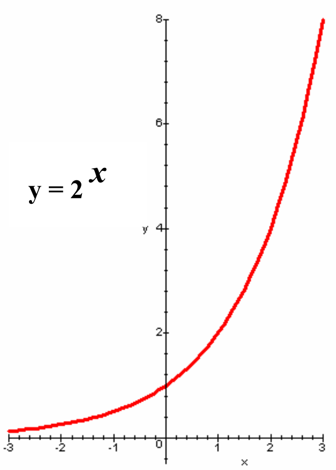
On a vu dans la *réciproque* du § IV que ces conditions initiales conduisent à $\boxed{f(u + v) = f(u).f(v)}$, et que d'après le § IV on peut affirmer que f(x) est toujours strictement positif. Par suite :

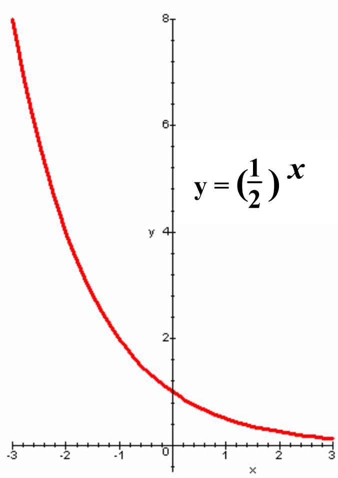
Si **k > 0** alors **a > 1** et **f est croissante** car f '(x) > 0

Si **k < 0** alors **a <1** et **f est décroissante** car f '(x) < 0

Le nombre k représente la pente de la tangente à la courbe au point (0 ;1).

Les limites se déduisent des relations obtenues au § VI. D'où les courbes suivantes :





IX – Applications Théoriques

1°) Formules Algébriques :

Exp (a + b) = Exp(a) . Exp(b) ; Exp (0) = 1 ; Exp (1) = e ; Exp(-a) = $\dfrac{1}{\text{Exp (a)}}$; Exp (a – b) = $\dfrac{\text{Exp (a)}}{\text{Exp (b)}}$

Exp (na) = $[\text{Exp(a)}]^n$; Exp ($\frac{a}{n}$) = $\sqrt[n]{\text{Exp(a)}}$ (n >1) . D'où les formules : ♥ ♥ ♥

$\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b}$ $\boxed{e^0 = 1}$ $\boxed{e^1 = e}$ $\boxed{e^{-a} = 1 / e^a}$ $\boxed{e^{a-b} = e^a / e^b}$ $\boxed{e^{na} = (e^a)^n}$ $\boxed{e^{a/n} = (e^a)^{1/n} = \sqrt[n]{e^a}}$

2°) Formules Analytiques : Dérivation d'une fonction composée avec l'exponentielle :

Soit u une fonction dérivable sur R et f(x) = Exp [u(x)], alors *f '(x) = u'(x).Exp[u(x)]*

ou ♥ ♥ ♥ $\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).\, e^{u(x)}}$ En particulier $\boxed{\left(e^{-x}\right)' = -\, e^{-x}}$

- *Formule à ne pas confondre avec la dérivation des puissances :* $[U^n(x)]' = n\, U'(x).U^{n-1}(x)$

3°) Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

i) Rappel : $\boxed{f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \iff f(x) = e^x}$ *c'est par définition **la** fonction dite Exponentielle qui coïncide avec celle déterminée par la méthode d'Euler, et qui possède toutes les propriétés ci-dessus.*

ii) $\boxed{f'(x) = k.\, f(x) \ \text{avec} \ f(0) = 1 \iff f(x) = e^{kx}}$ . ....

- *Démo de l'implication (⇒) : on pose* $g(x) = f(\frac{x}{k})$ *d'où* $g'(x) = \frac{1}{k} f'(\frac{x}{k}) = \frac{1}{k} k.\, f(\frac{x}{k}) = f(\frac{x}{k}) = g(x)$

d'où $g'(x) = g(x)$ *Donc d'après a) on a* $g(x) = e^x$ *d'où* $g(kx) = e^{kx}$ *d'où* $f(x) = e^{kx}$ *car* $f(x) = g(kx)$.

- *La réciproque (⇐) est évidente :* $y = e^{kx} \Rightarrow y' = k\, e^{kx} \Rightarrow y' = k\, y$ *, mais comme on a démontré plus haut que l' équation f '(x) = k. f (x) avec f(0) = 1, admet une solution est unique,, la fonction trouvée est l'unique solution.*

iii) $\boxed{f'(x) = k.\, f(x) \ \text{avec} \ f(0) = A \iff f(x) = Ae^{kx}}$. ♥ ♥ ♥

- *Démo de l'implication (⇒) : on pose* $h(x) = \frac{f(x)}{A}$ *d'où* $h'(x) = \frac{1}{A} f'(x) = \frac{1}{A} k.\, f(x) = k.\, h(x)$

d'où $h'(x) = k.h(x)$ *et d'autre part* ***h(0) = 1*** *Donc d'après b) on a* $h(x) = e^{kx}$ *d'où* $f(x) = A.\, e^{kx}$.

- *La réciproque (⇐) est évidente :* $y = A\, e^{kx} \Rightarrow y' = A\,.k.\, e^{kx} \Rightarrow y' = k.\, A\, .\, e^{kx} \Rightarrow y' = k.y$ *et* $y(0) = A$.

iv) Cas général : $\boxed{y' = a\, y + b \iff y = f(x) = Ae^{ax} - \frac{b}{a}}$ ♥ ♥ ♥

On pose $z = y + \frac{b}{a}$ *d'où* $z' = y' = a.y + b = a.z$

donc $z'(x) = a\, z(x)$ *et en supposant que* $z(0) = A \Rightarrow z = A\, e^{ax}$

Et par suite $y = z - \frac{b}{a} = A.e^{ax} - \frac{b}{a}$ *C.Q.F.D.*

si $y(0) = c$ *(constante donnée alors* $c = A - \frac{b}{a}$ *soit* $A = c + \frac{b}{a}$*)*

- *En pratique on écrit la formule ci-dessus et on calcule A, si nécessaire, en utilisant les données du problème (« conditions initiales »).*

NB : la notation y' est souvent utilisée à la place de f '(x) pour abréger les formules. On écrit alors aussi parfois y(0) au lieu de f(0).

- *Ces équations différentielles sont au centre de l'étude de problèmes physiques et biologiques que l'on va examiner dans les pages suivantes :*

Désintégration des noyaux radioactifs / Constante de temps / Demi-vie.
Décharge d'un condensateur
Charge d'un condensateur

IX – Applications Expérimentales

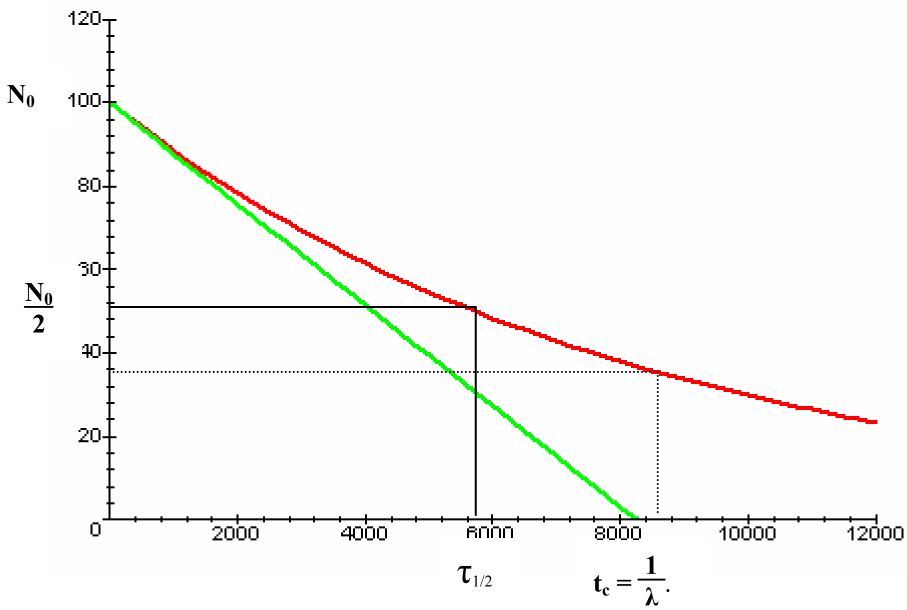
1°) Désintégration d'un noyau radioactif .

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante :
Si N(t) est le nombre de noyaux à l'instant t, le *taux de désintégration* des noyaux $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ est proportionnel au nombre de noyaux, c'est à dire que $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda\, N(t)$ avec $\lambda > 0$ car il y a diminution du nombre de noyaux.
En passant à la limite quand $\Delta t \to 0$, on obtient, en supposant la fonction N dérivable et N_0 le nombre de noyau à l'instant initial t = 0,

$$\mathbf{N'(t) = -\lambda\, N(t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{N(0) = N_0} \text{ constante donnée.}$$

On en déduit immédiatement d'après (iii) dans le § IX-3°) que $\mathbf{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}}$
La fonction N est donc strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
La tangente au point d'abscisse t = 0 a pour équation $\mathbf{y = -\lambda\, N_0\, t + N_0}$ et coupe l'axe des abscisses en $\mathbf{t_c} = \frac{1}{\lambda}$.
Cette constante est appelée **constante de temps** ou *temps caractéristique* de l'atome considéré. Cette constante n'est autre que la *sous-tangente* associée à cette exponentielle.
D'autre part on appelle **Demie-Vie** la durée nécessaire pour que le nombre de noyaux diminue de moitié. Cette constante notée $\tau_{1/2}$ dépend de la valeur de $\boldsymbol{\lambda}$.
En effet on a $\mathbf{N(\tau_{1/2})} = \frac{\mathbf{N_0}}{\mathbf{2}}$ i.e. $\mathbf{N_0\, e^{-\lambda\, \tau_{1/2}}} = \frac{\mathbf{N_0}}{\mathbf{2}}$ donc $\mathbf{e^{-\lambda\, \tau_{1/2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, ce qui en prenant le *logarithme népérien* (*inverse de la fonction Exponentielle étudiée plus loin*), donne :

$$\lambda\, \tau_{1/2} = \mathbf{ln\ 2} \text{ ou } \boxed{\tau_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{ln\ 2}} \text{ soit } \tau_{1/2} = \mathbf{t_c\ ln\ 2 \approx 0{,}7\ t_c}$$



Sur la figure ci-dessus on a pris les valeurs correspondant au Carbone 14 dont la demi-vie est évaluée à $\tau_{1/2}$ = ***5730 ans*** *par comparaison avec d'autres phénomènes. L'unité de temps choisie est l'année. Les ordonnées représentent en fait des % en quantité de C_{14} à partir de* $\boldsymbol{N_0 = 100}$ ***(%).***

Ainsi obtient-on $\mathbf{t_c} = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{5730 / 0{,}7 \approx 8266}$ *ans et donc* $\boldsymbol{\lambda = 1/8266 \approx 1{,}2.10^{-4}}$ *d'où l'équation de la courbe.*

On peut montrer également que quelque soit t on a $\boldsymbol{N(t+\tau_{1/2})} = \frac{1}{2}\boldsymbol{N(t)}$ ***,*** *ce qui justifie l'expression « demi-vie »*

En effet on a $\boldsymbol{N(t+\tau_{1/2}) = N_0\, e^{-\lambda(t+\tau_{1/2})}} = \mathbf{e^{-\lambda t}\,.\,N_0\, e^{-\lambda\tau_{1/2}}} = \mathbf{e^{-\lambda t}\,.\,\frac{N_0}{2}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{N(t)}$ *C.Q.F.D.*

Application Numérique : un fragment d'os contient 35 % de sa quantité initiale de *C_{14}.Déterminer son âge.*
On écrit que 35 = $\mathbf{N_0\, e^{-\lambda t}}$ = 100. $e^{-1{,}2.10^{-4}\, t}$ d'où par passage au logarithme néperien : $1{,}2.10^{-4}\, t = -\ln(0{,}35)$
On trouve à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur : $t = -\ln(0{,}35) / 1{,}2.10^{-4} \approx$ 8750 ans que l'on peut lire sur le graphique.

2°) Croissance d'une population de bactéries.

On observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries.
Soit N(t) le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en heures). N étant supposée dérivable sur $[0\,;+\infty[$
Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle :

$\boxed{N' = 0{,}7\,N.\,(1-10^{-3}.\,N)}$ appelée **Équation logistique**

A - Pour résoudre cette équation différentielle du premier ordre mais non linéaire, on pose $\mathbf{P(t) = \frac{1}{N(t)}}$ $N(t) > 0$

1. Démontrer que P vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre $P' = -0{,}7.\,P + 7.10^{-4}$
2. Résoudre cette équation différentielle en P(t).
3. En déduire l'expression de N(t) sachant que N(0) = 100.
4. Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction N obtenue.

B -On se propose de comparer le graphe de la fonction obtenue avec celui que l'on obtiendrait par la Méthode d'Euler de résolution de l'équation différentielle initiale.

1. Écrire l'équation de définition de la différentielle d'une fonction en un point en t=a pour dt = h très petit.
2. Établir la relation permettant de calculer approximativement N(a + h) en fonction de N(a) et de h.
3. Saisir dans un tableur la formule obtenue en partant de a = 0 jusqu'à 10 avec h = 0,1 , calculer les valeurs approximatives de N(t) à l'aide de la formule obtenue en (2°) et représenter graphiquement cette série de valeurs dans un graphe en mode « nuage de points » en précisant les abscisses et les ordonnées.
4. Dans une colonne supplémentaire calculer les valeurs obtenues par la résolution formelle de l'équation initiale en [A.(3°)], et représenter cette fonction dans le même graphe que précédemment.

Solution du §A : $P(t) = \frac{1}{N(t)}$ donne $P'(t) = \frac{-N'(t)}{N^2(t)}$ et donc en divisant les deux membres de l'équation logistique $N' = 0{,}7\,N - 0{,}7.10^{-3}.\,N^2$ par $[-N^2(t)]$ on obtient immédiatement l'équation différentielle $P' = = -0{,}7.\,P + 7.10^{-4}$

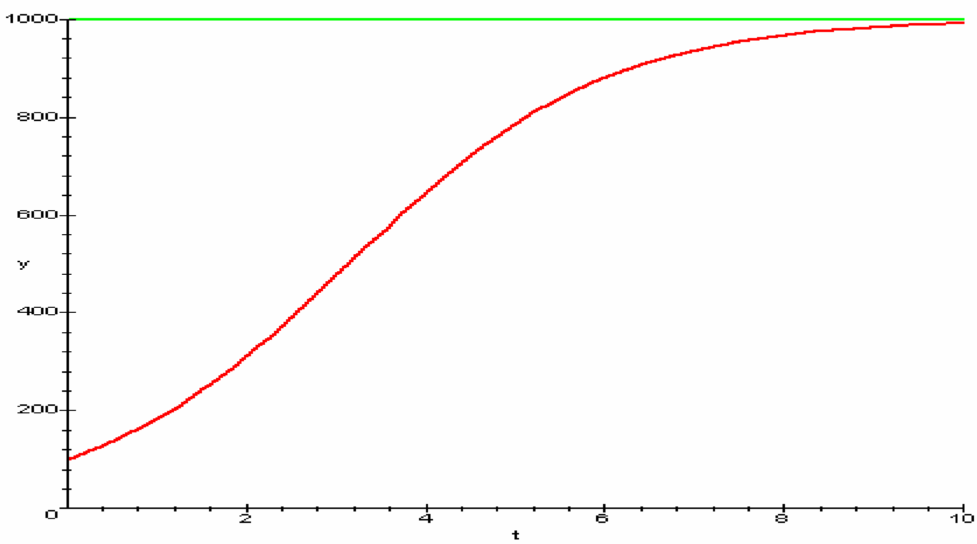
Cette équation est de la forme $y' = a.y + b$ et a donc pour solution $y = Ae^{ax} - \frac{b}{a}$.

Ici on a y =P, a=-0,7 ; $b = 7.10^{-4}$ d'où le résultat $P(t) = A\,.\,e^{-0{,}7t} + 10^{-3}$ où A est une constante dépendant des conditions initiales.

On en déduit immédiatement $N(t) = \dfrac{1}{A\,.\,e^{-0{,}7t} + 10^{-3}}$; et comme par hypothèse on a N(0) = 100 on peut en déduire la valeur de A : pour t = 0 on a $a\,.\,e^{-0{,}7.\,0} = 1$ d'où $A + 10^{-3} = 10^{-2}$; donc A = 0,010 – 0,001 = 0,009.

$$\text{Donc } N(t) = \frac{1}{9.10^{-3}\,.\,e^{-0{,}7.\,t} + 10^{-3}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{N(t) = \frac{1000}{9.\,e^{-0{,}7.\,t} + 1}}$$

En utilisant l'équation logistique initiale $N'(t) = 0{,}7\,N(t)\,.[1 - 10^{-3}.\,N(t)]$ et l' hypothèse $\mathbf{0 < N(t) < 1000}$, on en tire $\mathbf{N'(t) > 0}$ pour tout $t \geq 0$. Donc N strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} N(t) = 1000$. d'où la courbe :



Solution du §B : Par définition de la différentielle d'une fonction en t = a on a pour tout accroissement dt = h :

$$\mathbf{dN = N'(a).dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Delta N \approx dN} \text{ donc } N(a + dt) - N(a) \approx N'(a).dt\,,$$

$$\text{i.e. } \boxed{N(a + dt) \approx N(a) + N'(a).dt}.\ (a \geq 0)$$

Par suite en utilisant l'équation différentielle logistique initiale :

$$N(a + dt) \approx N(a) + 0{,}7\, N(a).\ (1 - 10^{-3}.\ N(a)).dt$$

$$N(k.dt + dt) \approx N(k.dt) + 0{,}7\, N(k.dt).\ (1 - 10^{-3}.\ N(k.dt)).dt$$

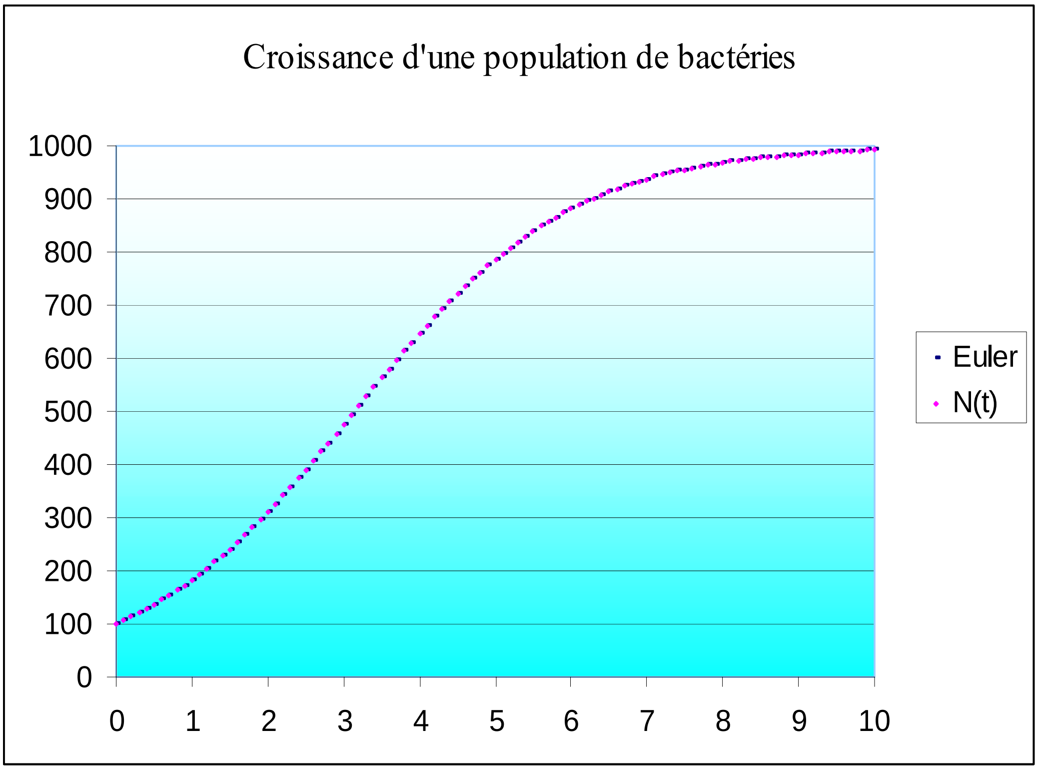
Donc si dt est fixé (par exemple dt = 0,1) et si on pose $N_k = N(k.dt)$, on a la relation de récurrence de construction de la solution par la méthode d'Euler :

$$\boxed{N_{k+1} = N_k + 0{,}7\, N_k.\ (1 - 10^{-3}.\ N_k).0{,}1}\quad (*)$$

On constate sur la figure ci-dessous que pour un dt = 0,1 la différence entre les deux courbes obtenues est infime.

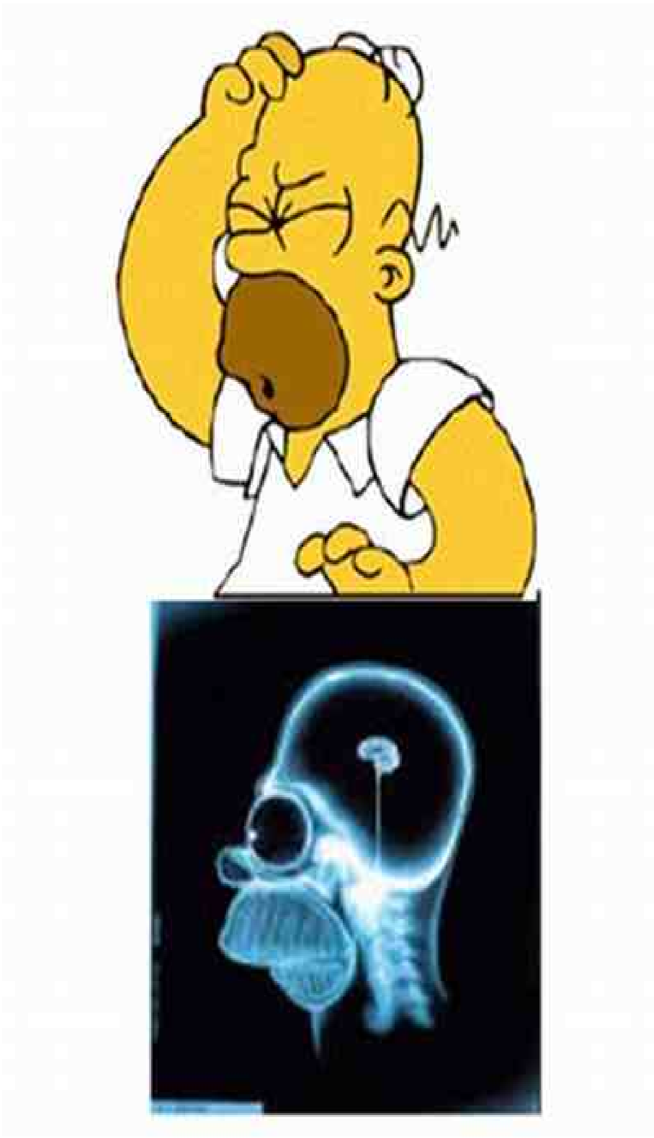
Dans le tableur la formule (*) se construit en remplaçant N_k par la référence de la cellule précédente.

t	Euler	N(t)
0	100	100
0,1	106,3	106,48
0,2	112,95	113,32
0,3	119,96	120,55
0,4	127,35	128,17
0,5	135,13	136,2
0,6	143,31	144,65
0,7	151,91	153,52
0,8	160,93	162,84
0,9	170,38	172,61
1	180,27	182,84
1,1	190,62	193,53
1,2	201,42	204,69
1,3	212,68	216,32
1,4	224,4	228,43
1,5	236,58	241
1,6	249,22	254,03
1,7	262,32	267,52
1,8	275,87	281,46
1,9	289,85	295,83
2	304,26	310,62
2,1	319,08	325,8
2,2	334,29	341,36
2,3	349,86	357,27
2,4	365,79	373,5
2,5	382,02	390,02
2,6	398,55	406,8
2,7	415,33	423,79
2,8	432,33	440,97
2,9	449,51	458,29
3	466,83	475,71



NB : Ce deuxième exemple d'utilisation de la méthode d'Euler peut-être fréquemment utilisé pour résoudre des équations différentielles dont on ne peut expliciter les solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Gratte… Gratte… Gratte…. toujours …



Mais où est donc passé le Logarithme ???

(Comme disait Euler, Homer Néperien pour attendre !)