Calculatrices autorisées

Exercice 1 : R.O.C. *(4 points)*
(Pour tous les candidats)

1°) **Prérequis** : on suppose connues les deux propriétés suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et (2) pour tout x > 0 , ln (x) < x

a) Démontrer que quelque soit n, entier naturel, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$

d) En déduire que, quelque soit n > 0, $\lim\limits_{x \to 0+} x^n \ln x = 0$

2°) **Prérequis** : Modules et Arguments d'un nombre complexe, forme exponentielle.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On appelle j la racine complexe dont la partie imaginaire est positive.

b) Etablir la relation $1 + j + j^2 = 0$

c) Déterminer les éléments caractéristiques de la transformation du plan définie par :

$$z' = j^2(z - j) + j$$

d) Etablir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle ABC dont les affixes sont notés z_A, z_B, z_C soit équilatéral.

Exercice 2 *(5 points)*
(Pour tous les candidats)

Partie A – Etude préliminaire d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.

4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.

5. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{2 - \alpha}$.

Partie B – Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

1. Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la partie **A**, construire le tableau des variations de f.

4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie **A** s'annule.

Calculatrices autorisées

Exercice 3 *(5 points)*

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\ \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. *a.* Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.
   b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.
   Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.
   a. Justifier les égalités suivantes :
   $$c\bar{c} = R^2 \quad ; \quad (c-2i)(\bar{c}+2i) = R^2 \quad ; \quad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2.$$
   b. En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ puis que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
   c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

Exercice 3 *(5 points)*

(Pour les candidats ayant choisi l'option Spécialité)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.a. Pour $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne par 7 pour n quelconque ?

e. En déduire que pour tout entier naturel n, 3^n n'est pas multiple de 7.

2. Soit $U_n = 1+3+3^2+ \dots +3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $U_n = \frac{3^n - 1}{2}$ puis que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.

c. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Calculatrices autorisées

Exercice 4 *(6 points)*
(Pour tous les candidats)

Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $I = [-2\ ;\ 0]$ est incluse dans cet intervalle.

2. a. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}.$$

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2\ ;\ 0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}.$$

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n).

3. a. Soit m la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $m(x) = x - \ln(1+x)$.
Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.

En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2 - v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?