CONTRÔLE TS $n°2$ - 2004-2005. (A.Dédé)

Exercice [1]

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct, on considère les points distincts A, B et C d'affixes respectives a , b et $-b$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que les points A, B et C soient alignés.
   On suppose dans la suite ~~que les points A, B et C ne sont~~ pas alignés et que $0 < (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < \pi$.
   Faire un schéma correspondant à cette configuration.

2. Sur les droites (AB) et (AC) et à l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés $AFGB$ et $ACDE$, et le parallèlogramme $AEHF$ de sorte que

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

   (a) Grâce à la rotation de centre A qui transforme C en E, montrer que l'affixe e de E est $e = -ib + a(1 - i)$.

   (b) Calculer les affixes f, h et d des points respectifs F, H et D en fonction de a et b.

3. Déduire du 2) que:

   (a) $FE = 2OA$ et que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires;

   (b) $BD = CH$ et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires;

   (c) $AH = 2OB$ et les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires;

   (d) les droites (BD), (AH) et (CG) sont concourantes en un point Ω que l'on caractérisera.

Exercice [2]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $(2z)^3 - (z+1)^3 = 0$ et vérifier qu'elle admet une racine réelle.
   (On pourra poser $Z = \dfrac{z+1}{2z}$).

2. Vérifier que, dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé, les images des racines de (E) appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ d'équation:

$$3(x^2 + y^2) - 2x - 1 = 0.$$

3. Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui au point $M(u)$ associe le point $M'(u' = \dfrac{1}{2u - 1})$.

   (a) Démontrer l'équivalence $\mid u \mid = 1 \iff M'(u') \in \mathcal{C}$.

   (b) En déduire que pour tout entier n non nul, les points dont les affixes sont les racines de

$$(E_n) \quad (2z)^n - (z+1)^n = 0$$

   appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice [3]

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unités graphiques: 2cm).
On désigne par A, B et Ω les points d'affixes respectives i, -2 et 1.
On note F l'application qui à tout point M d'affixe z de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+2}{z-i}$.

1. On note I le milieu du segment $[AB]$.
   Déterminer l'affixe du point I' image de I par F et placer les points A, B, I, I'.

2. Etant donné un nombre complexe z distinct de i, on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.

   (a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

(b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

(c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

3. (a) Soit M un point de $\mathcal{P}$, distinct de A et de B, d'affixe z.
   Interpréter géometriquement l'argument de z'.

   (b) Retrouver les deux résultats suivants :
   - si z' est réel alors M, A et B sont alignés,
   - si z' est imaginaire pur alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

4. (a) Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$ distinct de A, son image M' vérifie :
   1) $\Omega M'.AM = \sqrt{5}$.
   2) $(\vec{u}, \vec{\Omega M'}) = \pi - (\vec{AB}, \vec{AM}) \quad (2\pi)$

   (b) En déduire et construire les ensembles de points suivants :
   1) l'ensemble Γ des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle de centre Ω de rayon 1.
   2) l'ensemble Δ des points M tels que l'image M' soit située sur la droite Δ', passant par Ω de vecteur directeur $\vec{v}$.

Exercice [4]

1. Démontrer que pour tout réel x et tout entier k, on a :

$$\cos(2k+1)x + i\sin(2k+1)x = e^{ix}.\left(e^{2xi}\right)^k.$$

2. En déduire que , pour tout $x \neq k\pi$:

$$\sum_{k=0}^{n} (\cos(2k+1)x + i\sin(2k+1)x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}e^{i(n+1)x}.$$

3. En déduire des expressions simplifiées de

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2k+1)x \quad \text{et de} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(2k+1)x.$$

4. Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+3}\right)$ est indépendante de n et calculer sa valeur.