Formule de Stirling

L'objet du problème est de montrer que, pour n très grand, $n!$ est comparable à $\frac{n^n(\sqrt{n})}{e^n}$. À cette fin, on introduit la suite obtenue en faisant le quotient de ces deux quantités. À l'aide de fonctions étudiées dans les parties **A** et **C** on montre d'abord que cette suite a une limite positive ou nulle (partie **B**), puis que cette limite est strictement positive (partie **D**).
Soit donc la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n(\sqrt{n})}.$$

Partie A — Étude du signe d'une première fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln(x).$$

1° Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

2° Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

3° Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est égale à 0.

4° Dresser le tableau de variation de f sur $]1, +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ dans $]1, +\infty[$.

5° Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Partie B — Étude de la convergence de la suite (u_n)

Soit (v_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = \ln(u_n)$.

1° *a*) En remarquant que $\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n)$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$v_n - v_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n) \qquad (1)$$

où f est la fonction étudiée dans la partie **A**.

b) Étudier le sens de variation de la suite (v_n), puis le sens de variation de la suite (u_n).

2° Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul, noté ℓ.

Partie C — Étude du signe d'une deuxième fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

où f est la fonction définie à la partie A.

1° Calculer la dérivée g' de g et vérifier que, pour tout x dans $[2, +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

2° Dresser le tableau de variation de g, calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2, +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g.)

Partie D — Cette dernière partie a pour but de montrer que la limite ℓ de la suite (u_n) est un réel strictement positif.

1° Étude d'une suite auxiliaire.

Soit (w_n) la suite définie pour $n \geqslant 2$ par $w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx. \qquad (2)$$

b) Déduire de (2) l'inégalité, pour n entier supérieur ou égal à 2,

$$w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx. \qquad (3)$$

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

c) Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer $\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$ et montrer que $w_n \leqslant 1$.

d) Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel w vérifiant $w \leqslant 1$.

2° *a*) À l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie B et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie C, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$v_k - v_{k-1} \geqslant -\frac{1}{5k^2}.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$v_n \geqslant -\frac{1}{5} w_n + 1.$$

c) Montrer enfin que la limite ℓ de la suite (u_n) est supérieure ou égale à $e^{\frac{4}{5}}$ et donc est strictement positive.