C] 2°) $\text{Sgn}[g'(x)] = \text{Sgn}[-7x^2+16x-4]$ sur $[2;+\infty[$. $= \ominus$ **D6** **2/2**

car $-7x^2+16x-4$ admet pour racines $\frac{2}{7}$ et 2. $(a=-7<0)$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{1}{5x^2(x-\frac{1}{2})} = \lim_{+\infty} \frac{1}{5x^3} = 0$.

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	$\ominus$	
g	$g(2)$ ↘	0

$g(2) = f(2) + \frac{1}{20\times\frac{3}{2}} = \frac{1}{30} + f(2) = \frac{1}{30} + \frac{2}{3} - \ln 2 > 0$ $(\simeq 0{,}076)$.

$g > 0$ sur $[2;+\infty[$ et continue | Donc $\boxed{g(x) > 0}$ sur $[2;+\infty[$ (strictement)

D] 1°) $w_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Soit $k \geq 2$, $k-1 \leq x \leq k \Rightarrow (k-1)^2 \leq x^2 \leq k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2} \Rightarrow$

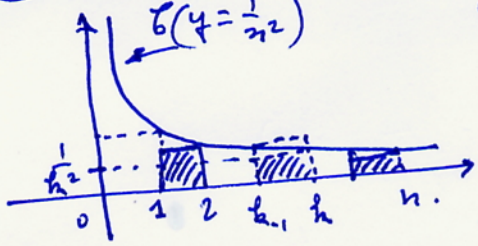
$\Rightarrow$ (Inégalités de la moyenne sur $[a;b]$ avec $a = k-1$ et $b = k$]

$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. $m = \frac{1}{k^2}$ $M = \frac{1}{(k-1)^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{k^2}[k-(k-1)] \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{1}{(k-1)^2}[k-(k-1)] \Rightarrow \boxed{\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2}} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2^2} \leq \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \\ \frac{1}{3^2} \leq \int_2^3 \frac{dx}{x^2} \\ \dots\dots \\ \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^2} \end{cases}$$

∘ Interprétation graphique :



• Aire du Rectangle

• Aire du domaine compris entre $\mathcal{C}(y=\frac{1}{x^2})$ et $[k-1;k]$. (car $y = \frac{1}{x^2} > 0$)

$w_n \leq \int_1^2 f + \int_2^3 f + \dots + \int_{n-1}^{n} f = \int_1^n \frac{dx}{x^2}$ (CHASLES pour les Intégrales).

$\Rightarrow \boxed{w_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^2}}$: la somme des aires des rectangles situés en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ sur chaque intervalle $[1;2]$; $[2;3]$ … $[n-1;n]$ est inférieure à l'aire du domaine défini par $\mathcal{C}$ et l'intervalle $[1;n]$.

∘ $\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow w_n \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ $\Rightarrow$ (w_n) MAJORÉE par 1 et $(w_n) \nearrow$ (car $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n^2} > 0$)

Donc $(w_n)_{n\geq 1}$ CONVERGE vers un Réel $w \leq 1$.

2°) a) $v_k - v_{k-1} = (k - \frac{1}{2})f(k)$ et $f(k) = g(k) - \frac{1}{5k^2(k-\frac{1}{2})}$ $\Big\} \Rightarrow v_k - v_{k-1} = -\frac{1}{5k^2} + \underbrace{(k-\frac{1}{2})g(k)}_{>0} \geq -\frac{1}{5k^2}$. CQFD

b) $v_n - 1 = v_n - v_1 = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \dots + (v_2 - v_1) \geq -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{5}w_n$.

$\Rightarrow v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$ or $w_n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{5}w_n \geq -\frac{1}{5} \Rightarrow v_n \geq \frac{4}{5} \Rightarrow \ln(u_n) \geq \frac{4}{5}$

$\Rightarrow u_n \geq e^{\frac{4}{5}} \Rightarrow \lim u_n > 0$. CQFD. CONCLUSION : pour n très GRAND

or a $u_n \simeq \ell$ i.e $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \simeq \ell \Rightarrow n! \simeq \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ [on peut m.q. $\ell = \sqrt{2\pi}$] $\Rightarrow \boxed{n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

(Formule de STIRLING)