Problème : Recherche d'un équivalent pour $n!$ infiniment grand (Formule de STIRLING).

[A] Etude de $f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln x$ pour $x > 1$.

1°) $f'(x) = \frac{-1}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-x^2+x+x^2-x+1/4}{x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$

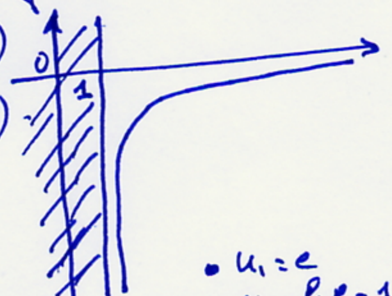
2°) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ car $\Bigg|$ $\lim\limits_{1} \frac{1}{x-\frac{1}{2}} = 2$ $\quad \ln 1 = 0$
et $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1) = \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$. (cours).

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) + \lim\limits_{+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $(X = x-1)$ $= 0 + \ln 1 = 0$ CQFD.

4°)

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
f	||	$-\infty \nearrow 0$

- $\mathrm{Sgn}[f'(x)] = \mathrm{Sgn}[x(x-1)] = \oplus$ sur $]1;+\infty[$.
- f étant continue (car dérivable) sur $]1;+\infty[$ le tableau indique que $f(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$
- ASYMPTOTES $\Big|$ $x = 1$ (Vert.) $\quad y = 0$ (Horiz.)



[B] Etude de $\boxed{u_n = \frac{n!\,e^n}{n^n(\sqrt{n})}}$.

$v_n = \ln(u_n) = \ln(n!) + \ln e^n - \ln(n^n) - \ln(\sqrt{n})$ $\boxed{n \geq 1}$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k + n - n\ln n - \frac{1}{2}\ln n$

- $u_1 = e$
- $v_1 = \ln e = 1$

1°) a) $v_n - v_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln k + (n-(n-1)) - \left[(n+\frac{1}{2})\ln n - (n-1+\frac{1}{2})\ln(n-1)\right]$

$= \ln n + 1 - (n+\frac{1}{2})\ln n + (n-\frac{1}{2})\ln(n-1)$.

$= 1 + (n-\frac{1}{2})[\ln(n-1) - \ln n] = 1 + (n-\frac{1}{2})\left[\ln \frac{n-1}{n}\right]$ $\Bigg\}$ $(n \geq 2)$.

$= (n-\frac{1}{2})\left[\frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \ln(n-1) - \ln n\right] = (n-\frac{1}{2})\cdot f(n)$.

b) $\left.\begin{array}{l} f(n) < 0 \\ n \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (n-\frac{1}{2})\cdot f(n) < 0 \Rightarrow v_n - v_{n-1} < 0$ pour tout $\boxed{n \geq 2}$.
$\Rightarrow v_n \geq v_{n-1}$ pour tout $n \geq 2 \iff (v_n)_{n\geq 1} \nearrow$.

- $v_n = \ln u_n \iff u_n = \mathrm{Exp.}(v_n)$ et $\mathrm{Exp.} \nearrow$ sur $\mathbb{R}$ donc $(u_n) \searrow$.

2°) (u_n) MONOTONE (décroissante) et MINORÉE (par 0) donc (u_n) CONVERGE vers une limite $\ell \geq 0$ (de plus $u_1 = e \Rightarrow 0 \leq \ell \leq e$)

[C] Etude de $\boxed{g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x-\frac{1}{2})}} = f(x) + \frac{1}{5x^3 - \frac{5}{2}x^2}$ $\boxed{x \geq 2}$.

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{15x^2-5x}{5x^4(x-\frac{1}{2})^2} = f'(x) - \frac{3x-1}{5x^3(x-\frac{1}{2})^2} = \dots = \frac{-7x^2+16x-4}{40x^3(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$.

$(x \geq 2)$.