Exo N°27 (Suite et fin).

Etude de l'ASYMPTOTE : Calcul de $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\right]$ 2/2

en posant $t=\frac{1}{x}$ ou $x=\frac{1}{t}$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\right)\right]=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{4-2(1+e^t)+t(1+e^t)}{4t(1+e^t)}\right]\quad \left(\text{IND}^\circ\ \frac{0}{0}\right).$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[2\frac{(1-e^t)}{t}\times\frac{1}{4(1+e^t)}+\frac{1}{4}\right]$$ or on sait que $\boxed{\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1}$.

$$\text{Donc }=2\times(-1)\times\frac{1}{4(1+1)}+\frac{1}{4}=0 \quad \text{CQFD.}$$

De même lorsque $x\to-\infty$ $\frac{1}{x}=t\to0^-$ $\lim_{-\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\right]=0$.

NB. Pour déterminer la position de (C_f) par rapport à l'ASYMPTOTE, il faudrait étudier le signe de la différence $\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\right]=g(x)$ et pour cela étudier les variations de la fonction $g(x)$:

$$g'(x)=\frac{\varphi(x)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}-\frac{1}{2}.$$ On pourrait alors montrer que $g(x)>0$ à l'aide des variations de φ déjà étudiées... $(x\neq0)$.