EXO N°27 [AMIENS, 1982] (ANNALES NATHAN 2005) ①/2

$$\boxed{\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1} \quad (x \neq 0).$$

$\bullet \lim\limits_{-\infty} \varphi = \boxed{2^-}$ car $x \to -\infty$ $\begin{cases} \frac{1}{x} \to 0^- \\ e^{\frac{1}{x}} \to 1^- \end{cases}$

$\bullet \lim\limits_{+\infty} \varphi = \boxed{2^+}$ car $x \to +\infty$ $\begin{cases} \frac{1}{x} \to 0^+ \\ e^{\frac{1}{x}} \to 1^+ \end{cases}$

• $D_\varphi =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

• $\lim\limits_{0^-} \varphi = \lim\limits_{x \to 0^-} \left[e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 \right] = \boxed{1}$. car $\begin{cases} \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to 0^+ \\ \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = X e^{X} \text{ avec } X \to -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} X e^{X} = 0 \end{cases}$

• $\lim\limits_{0^+} \varphi = \boxed{+\infty}$ car $\left| \begin{array}{l} \left(1+\frac{1}{x}\right) \to +\infty \text{ et } e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \\ \text{quand } x \to 0^+ \ \frac{1}{x} \to +\infty \end{array} \right.$

• $\varphi'(x) \underset{(x\neq 0)}{=} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{\frac{1}{x}} + 0 = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[1+1+\frac{1}{x}\right] = \boxed{-e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x+1}{x^3}\right)}$

$\Rightarrow \text{Sgn}[\varphi'(x)] = -\text{Sgn}\left[\frac{2x+1}{x}\right]$ d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
φ	2^-	↘	m	↗	1 ‖ $+\infty$	↘	2^+

$m = \varphi(-\frac{1}{2}) = (1-2)e^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{1}{\sqrt{e}} + 1 \simeq 0{,}4 > 0$

Donc $\varphi(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

<u>ASYMPTOTES</u> $\begin{cases} y = 2 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty. \\ x = 0 \text{ à droite seulement.} \end{cases}$

<u>NB</u>. si l'on pose $\varphi(0) = 1$ alors φ serait <u>CONTINUE à gauche</u> en 0.

2°) $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0) \\ f(0) = 0. \end{array} \right.$

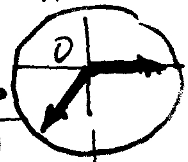
a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ car } \frac{1}{x} \to +\infty \text{ et } e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \text{ car } \frac{1}{x} \to -\infty \text{ et } e^{\frac{1}{x}} \to 0^+ \end{cases}$

• Donc f CONTINUE en 0
à droite et à gauche puisque $\lim\limits_{0} f = f(0)$.

• les formules de dérivation ne s'appliquent pas à f car $\frac{1}{x}$ non dérivable en 0.
Donc on cherche directement la limite du TAUX d'Acct en 0 :

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $\left\{ \begin{array}{l} x \to 0^+ \quad e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \quad \lim\limits_{0^+} \frac{f(x)}{x} = 0^+ \\ x \to 0^- \quad e^{\frac{1}{x}} \to 0^+ \quad \lim\limits_{0^-} \frac{f(x)}{x} = 1 \end{array} \right.$

Donc f dérivable à droite et à gauche SÉPARÉMENT :
$f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = 1$ $\Rightarrow$ on aura 2 demi-tangentes en 0 $\to$



b) $f'(x) = \left[\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right] \times \dfrac{1}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \boxed{\dfrac{\varphi(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}}$.

$\Rightarrow \text{Sgn}[f'(x)] = \text{Sgn}[\varphi(x)] = \oplus$ sur $\mathbb{R}^* \Rightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

3°) • $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ $\quad\Big|\quad$ $\lim\limits_{+\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right]$

• $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ $\quad\Big|\quad$ $= \lim\limits_{t = \frac{1}{x} \to 0^+} \left[\dfrac{1}{t(1+e^{t})} - \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{4}\right]$. $\Rightarrow$ <u>INDET</u> : $[\infty - \infty]$.

à lever .../...