Nelle Calédonie 1993 [P.146. N° 22] TS4 D5 ③

① $f_k(x) = \boxed{xe^{-x}+kx}$; $x>0$; $k\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} kx = \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ 0 & \text{si } k=0 \\ -\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$ | $\lim_{+\infty} xe^{-x} = 0$

(D_k) Asymptote à (C_k) en $+\infty \overset{(\text{déf.})}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-kx\right] = 0^+$ ce qui est VRAI car

$f_k(x)-kx = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \longrightarrow 0^+$ car "EXP(x) IMPOSE sa limite à la PUISSANCE".

[Th. du Cours : $\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ d'où $\lim_{+\infty}\frac{x}{e^x} = 0^+ \dots$] et (C_k) au DESSUS de (Δ_k) (en $+\infty$)

② $f_k'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) + k = \boxed{e^{-x}[1-x]+k}$ $\lim_{x\to+\infty} f_k'(x) = 0^+ - 0^+ + k = \boxed{k}$.

$f_k''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = \boxed{e^{-x}[x-2]}$.

x	0		2		$+\infty$
$f_k''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k'(x)$	$1+k$	↘	m	↗	k

$f_k'(2) = -e^{-2}+k = k-\frac{1}{e^2}$

En particulier : $\begin{cases} f_0'(2) = -\frac{1}{e^2} < 0 \\ f_1'(2) = 1-\frac{1}{e^2} > 0 \end{cases} \Longrightarrow f_1'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$

③. Le signe de $f_0'(x)$ change une fois sur l'intervalle $[0;2]$

en effet $\begin{cases} f_0'(2) = -\frac{1}{e^2} < 0 \\ f_0'(0) = 1 > 0 \end{cases}$ et $\lim_{+\infty} f_0'(x) = 0^{(-)}$ et $f_0'(x)$ est CONTINUE car DERIVABLE sur $\mathbb{R}_+$

Donc il existe $\alpha \in [0;2]$ tel que $f_0'(\alpha) = 0$: $f_0'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$ $(e^{-x}\neq 0)$

D'où les tableaux :

x	0		1		2	$+\infty$
$f_0'(x)$	1	$+$	0	$-$		
f_0	0	↗	M_0	↘		0

x	0		2		$+\infty$
$f_1'(x)$	2	$+$	$+$	$+$	
f_1	0	↗			$+\infty$

$M_0 = f_0(1) = \boxed{\frac{1}{e}} \simeq 0{,}4$

$f_0'(0) = 1$; $f_1'(0) = 2$

[car $f_k'(0) = 1+k$].