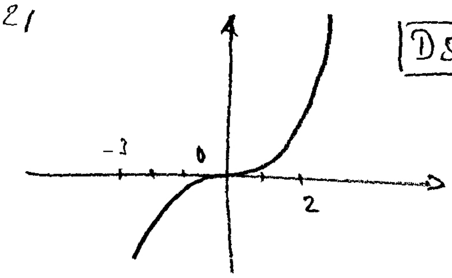
$\boxed{f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}}$ [INDE AVR. 2003] P. 144 N°21 [DS] (



<u>CONJECTURES</u> | a) f <u>paraît</u> CROISSANTE sur $[-3;2]$
b) C_f en DESSOUS de $(x'x)$ sur $\mathbb{R}_-$
au DESSUS de $(x'x)$ sur $\mathbb{R}_+$

[A] <u>Etude des VARIATIONS de f</u>

$f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2(1)e^{x-1} - x = x\left[e^{x-1}(x+2) - 1\right] = \boxed{x.g(x)}$

1°) $\boxed{g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1} = xe^{x-1} + 2e^{x-1} - 1 = \frac{x}{e}e^x + \frac{2}{e}e^x - 1$

a) Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim\limits_{+\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{-1}$ car $\lim\limits_{-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$.

b) $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1}$ (car $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(x) = x-1$ et $u'(x) = 1$)

$g'(x) = e^{x-1}[x+3]$. $\geq 0 \iff x+3 \geq 0 \iff \boxed{x \geq -3}$

x	$-\infty$	-3		α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		
g	0 ↘	m	↗	0	↗ $+\infty$

$g(-3) = -e^{-4} - 1 < 0$ mais $g(1) = 3e^0 - 1 = 2 > 0$

et g continue (car dérivable) et MONOTONE sur $[-3;+\infty[$

Donc il existe α <u>unique</u>, tel que $g(\alpha) = 0$, $\alpha > -3$ et $\alpha < 2$

De plus, $\left| \begin{array}{l} g(0{,}20) = 2{,}20e^{-0{,}8} - 1 \simeq -0{,}01 < 0 \\ g(0{,}21) = 2{,}21e^{-0{,}79} - 1 \simeq +0{,}003 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in [0{,}20; 0{,}21]$.

Par suite $g(x) \leq 0 \iff x \leq \alpha$ (et <u>donc</u> $g(x) > 0 \iff x > \alpha$).

3°) $\mathrm{Sgn}[f'(x)] = \mathrm{Sgn}[x.g(x)]$

$M = f(0) = 0$

$m = f(\alpha) = f(0{,}2) = (0{,}2)^2 e^{-0{,}8} - \frac{(0{,}2)^2}{2} \simeq -0{,}002$

Ainsi f n'est-elle pas strictement CROISSANTE sur l'intervalle $[-3;2] \Rightarrow$ conjecture a) <u>FAUSSE</u>

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	M	↘	m	↗	

[B] <u>Position de la courbe (C_f) par rapport à $(x'x)$</u>

- puisque $M = f(0) = 0$ et $m = f(\alpha) < 0$ on peut déjà affirmer que C_f est en DESSOUS de $(x'x)$ sur $]-\infty;0[\cup]0;\alpha[$.

1°) $f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2}$ avec $g(\alpha) = (\alpha+2)e^{\alpha-1} - 1 = 0 \iff e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$

D'où $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$. <u>CQFD</u>

2°) $\boxed{h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}}$ $h'(x) = \frac{-3x^2(2x+4) + x^3 \times 2}{4(x+2)^2} = \frac{x^2[2x - 6x - 12]}{4(x+2)^2} = \frac{-4x^2(x+3)}{4(x+2)^2}$

Par suite $h'(x) < 0$ sur $[0;1] \Rightarrow h \searrow$ sur $[0;1]$ et donc $h(0{,}2) > h(\alpha) > h(0{,}21)$

$h(0{,}21) \simeq \frac{-(0{,}21)^3}{2 \times 2{,}21} \simeq -0{,}0020$; $h(0{,}20) \simeq -\frac{(0{,}2)^3}{4{,}4} \simeq -0{,}0018 \Rightarrow -2.10^{-3} < f(\alpha) < -1{,}8.10^{-3}$