[ALGERIE 1999] ANN. P. 138 N°13. $\boxed{D_4}$ 2/2

1) $g(x) = x\cos x - \sin x \quad x \in [0;\pi]$

g DERIVABLE sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de f. dérivables

$g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$.

D'après le tableau de variation [g monotone et continue] $g(x) \le 0$ sur $[0;\pi]$

x	0	π
$\sin x$	$+$	
$-x\sin x$	$-$	
g	$0 \searrow$ ⊖	$-\pi$

2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{pour } x \in]0;\pi] \\ f(0) = 1 & \left(\lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\right) \end{cases}$

$f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \boxed{\dfrac{g(x)}{x^2}}$ $\boxed{x \neq 0}$

Donc $\operatorname{Sgn}[f'(x)] = \operatorname{Sgn}[g(x)]$ sur $]0;\pi]$.

x	0		π
$f'(x)$	$?$	⊖	$-\frac{1}{\pi}$
f	1	$\searrow$	0

la dérivée de f en 0 existe si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ existe et est finie

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ prend la forme IND $\boxed{\frac{0}{0}}$

Pour lever l'indétermination on encadre cette expression :

Soit $\begin{cases} \varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \\ \varphi'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \\ \varphi''(x) = -\sin x + x \\ \varphi'''(x) = -\cos x + 1 \end{cases}$

x	0		$+\infty$
$\varphi'''(x)$		$+$	
$\varphi''(x)$	0	$\nearrow$ ⊕	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$\nearrow$ ⊕	$+\infty$
φ	0	$\nearrow$ ⊕	$+\infty$

$\varphi'''(x) \ge 0$ sur $[0;\pi]$ car $|\cos x| \le 1$

$\varphi''(0) = 0 \quad \varphi'(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) \ge 0 \iff \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \ge 0 \\ \varphi''(x) \ge 0 \iff -\sin x + x \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\dfrac{x^3}{6} \le \sin x - x \le 0$ sur $\mathbb{R}$

Donc $-\dfrac{x}{6} \le \dfrac{\sin x - x}{x^2} \le 0$ sur $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

D'où $\lim\limits_{0}\left(-\dfrac{x}{6}\right) \le \lim\limits_{0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} \le 0 \iff$ $\boxed{\lim\limits_{0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0}$

Donc f DERIVABLE en 0 et $f'(0) = 0$

$f'(\pi) = \dfrac{g(\pi)}{\pi^2} = \dfrac{-\pi}{\pi^2} = -\dfrac{1}{\pi}$

Donc en $(0;1)$ demi-tangente : $\boxed{y = 1}$