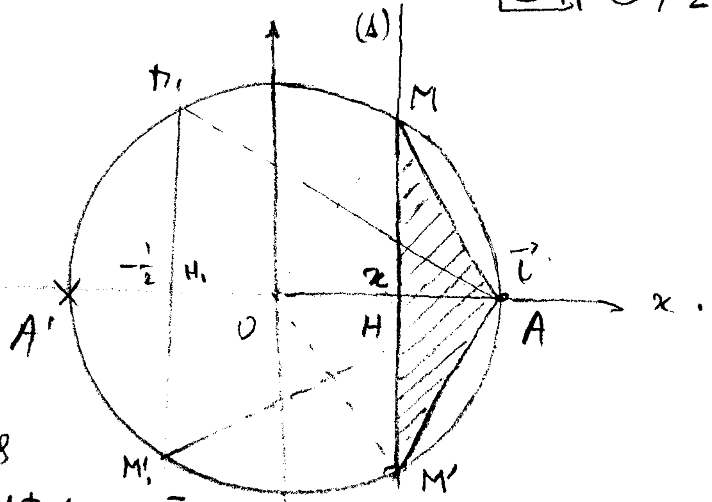
[AMIENS 1989] P. 135 N° 9 (ANN. 2005 / NATHAN) D4 ① / 2

Aire de $\widehat{AMM'} = \left(\frac{1}{2} AH \times HM\right) \times 2$

$= AH \times HM = (1-x)\sqrt{1-x^2} = f(x)$



$f'(x)$ ne peut être calculé à l'aide de formules de dérivées que sur $]-1;+1[$ car $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ n'existe pas pour $u=0$

Donc on cherche directement les limites des taux d'accroissement de f en -1^+ et en 1^- :

- $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = (1-x)\sqrt{\frac{1-x^2}{(x+1)^2}}$ pour $x > -1$

$= (1-x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \boxed{+\infty}$ car $(1-x) \to 2$, $(1+x) \to 0^+$

Donc la fonction est NON-DERIVABLE en -1 à droite mais la courbe admet en (-1) une DEMI-Tangente "VERTICALE" d'équation $\boxed{x=-1}$

- De même $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\sqrt{1-x^2}$

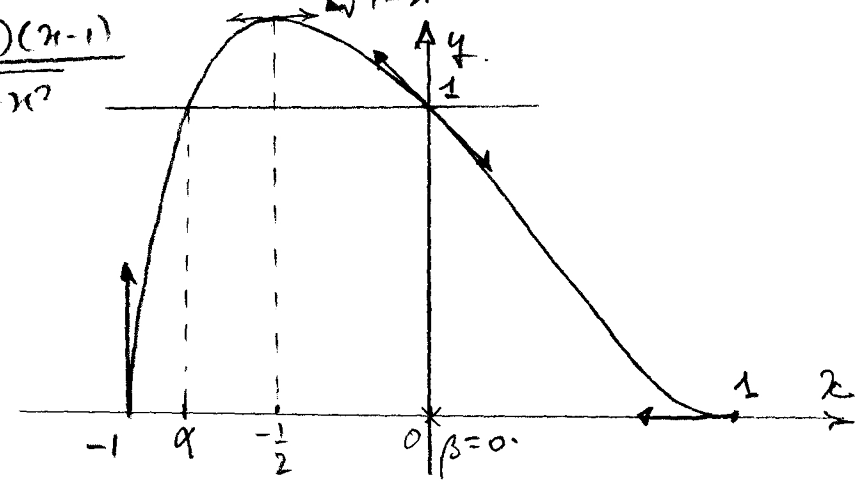
d'où $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{1-x^2} = \boxed{0^-}$.

Donc f DERIVABLE A GAUCHE en -1 $\Rightarrow$ Demi tgte : $y=0$

- pour $x \in]-1;1[$ on a $f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2-1+x(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
f	$0 \nearrow$	M	$1 \searrow$	0



$M = f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1,3$.

$f'(0) = -1$. Donc $x = -\frac{1}{2}$ l'aire de $\widehat{AMM'}$ est maximale

et dans ce cas particulier on a $H_1M_1 = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $MM_1 = \sqrt{3}$ et $AM_1 =$

et $AM_1 = \sqrt{H_1M_1^2 + AH_1^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} = AM'_1$ Donc $\widehat{AM_1M'_1}$ EQUILATERAL

④ Sur l'intervalle $[-1;-\frac{1}{2}]$ f est strictement monotone et CONTINUE donc elle définit une BIJECTION de $[-1;-\frac{1}{2}]$ sur $[0;M]$ avec $M = 1,3 > 1$

Donc f admet un antécédent unique α pour $1 \in [0;M]$ / tel que $f(\alpha) = 1$

D'autre part on a $f(0) = 1$ donc $\beta = 0$; $\alpha \in [-0,840; -0,839]$ (à 10^{-3} près)

résultat obtenu par DICHOTOMIE en partant de $[-1;-\frac{1}{2}]$ avec une calculatrice ■