jml@ecole-alsacienne.org
2004-2005

Suites Numériques Réelles ou Complexes

I- [6pts] Étude de la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 1 + \frac{6}{U_n}$

A – On pose $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$ pour $x > 0$.

1°) Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite (U_n) dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux).
2°) D'après la figure obtenue, la suite (U_n) est-elle monotone ? bornée ?
3°) Montrer par récurrence que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 7$
4°) Démontrer que la fonction f admet un point fixe α unique sur l'intervalle [1 ; 7].

B – On pose $g(x) = \frac{7x + 6}{x + 6}$, $V_n = U_{2n}$ suite des termes de rang pair et $W_n = U_{2n+1}$ la suite des termes de rang impair. On se propose de démontrer que (V_n) et (W_n) sont adjacentes.

1°) Démontrer que $g(x) = f[f(x)]$ et indiquer son sens de variation sur [1 ;7].
2°) Montrer que $V_{n+1} = g(V_n)$ et de même que $W_{n+1} = g(W_n)$
3°) Démontrer par récurrence que (Vn) est strictement croissante et que (Wn) est strictement décroissante.
4°) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq Vn \leq W_n \leq 7$
5°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n - V_n \leq 0,9\, [\, W_{n-1} - V_{n-1}\,]$
6°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq W_n - V_n \leq 6.(0,9)^n$
7°) En déduire la limite de $[W_n - V_n]$
8°) En déduire la limite de (V_n), (W_n) et (U_n).

III- [7 pts] Étude de suites composées : (a_n) et (b_n) définies par la récurrence croisée :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3\, b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)\ ,\ a_0 = 2\ ,\ b_0 = 4$$

A – Étude dans les nombres Réels.

On pose $U_n = a_n + b_n$; $V_n = a_n - b_n$; $P_n = a_n.b_n$; $Q_n = P_n - 9$

1°) Démontrer que (U_n) est constante, indiquer cette constante.
2°) Démontrer que (V_n) est géométrique , indiquer sa raison et le premier terme
3°) Exprimer a_n et b_n en fonction de n,
4°) Montrer que a_n et b_n ont la même limite et calculer cette limite.
5°) Démontrer que (Q_n) est géométrique, indiquer sa raison et le premier terme.
6°) Calculer P_n en fonction de n et indiquer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

B – Étude dans les nombres Complexes.

On pose $Z_n = a_n + ib_n$ et on appelle A_n son image dans le plan complexe.

1°) Calculer $(a_n)^2 + (b_n)^2$ en fonction de U_n et de P_n
2°) Exprimer $|Z_n|$ en fonction de n.
3°) Calculer la limite de $|Z_n|$
4°) Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers l'infini ?

III – 1.a. Soit (r_n) la suite géométrique réelle de premier terme $r_0 > 0$ et de raison $q = \frac{2}{3}$.

Exprimer r_n en fonction de r_0 et n.

1.b. Soit t_n la suite arithmétique réelle de premier terme $t_0 \in [0 ; \pi/2]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimer t_n en fonction de t_0 et de n

1.c. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = r_n(\cos t_n + i \sin t_n)$.
Sachant que z_0, z_1, z_2 sont liés par la relation $z_0z_1z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de z_0, z_1, z_2.

2. Dans le plan Complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique 4 cm ou 4 carreaux), on appelle M_n le point d'affixe z_n,
a. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan (P).
b. Pour tout entier naturel n , calculer M_nM_{n+1} en fonction de n.
c. On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$. Calculer L_n en fonction de n et déterminer la limite de L_n quand n tend vers l'infini.