V. Loi de durée de vie sans vieillissement.

" moins on est plus jeune, plus on est moins jeune "

On sait (COURS) que cette loi se traduit par une densité de probabilité exponentielle i.e. une fonction de la forme $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Ici on donne (cf. ÉNONCÉ) $p([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. qui représente la probabilité pour que l'objet ne soit plus en état de marche au delà de la date t (semaines).

• Si on mesure statistiquement que $\alpha(\%)$ d'un lot d'objet est encore en état de marche au bout de n semaines alors on en déduit que $\beta = 1-\alpha\,(\%)$ ne sont plus en état de marche au bout de n semaines, donc :

$$p(t \geq n) = \alpha(\%) \Rightarrow p([0;n[) = \beta\,(\%) \Rightarrow \int_0^n \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \beta.$$

• AN : Ici on a donc $\alpha = \beta = 50\% = 0{,}5 = \frac{1}{2} = p([0;200[)$.

$$\Rightarrow \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{200} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-200\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{200}} \text{ CQFD}$$

2°) $p(t \geq 300) = 1 - p([0;300[) = 1 - \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$$= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{300} = 1 - (1 - e^{-300\lambda}) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{300}{200}\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$= 2^{\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq \boxed{35{,}4\%}.$$

3°) a) $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^A x(-\lambda e^{-\lambda x})\,dx = -\left[x e^{-\lambda x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x}\,dx$ (IPP).

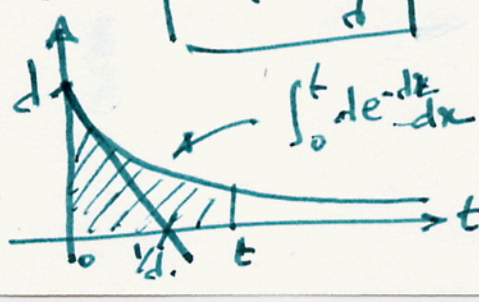
$$= -\left(A e^{-\lambda A} - 0\right) + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^A = -A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$$

b) $d_m = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \frac{(-\lambda A) e^{(-\lambda A)} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.$

On pose $X = -\lambda A$ donc $X \to -\infty$ d'où $\begin{cases} X e^X \to 0 & (\text{Th. de Comp}^{\circ}) \\ e^X \to 0 & (\text{Déf. Exp.}) \end{cases}$.

Par suite : $\boxed{d_m = \frac{1}{\lambda}} = \frac{200}{\ln 2} \simeq \boxed{289}$ (semaines).

Rappel :



tangente en $(0;\lambda)$: $y = f'(0)x + f(0)$

$y = -\lambda^2 x + \lambda$ coupe $\vec{ox}$ en $x = \frac{1}{\lambda}$

d_m est donc la SOUS-TANGENTE à la courbe