III. Applications Numériques de la loi BINÔMIALE.

1°) a) Famille de 4 enfants $p(G) = p(F) = \frac{1}{2}$ ⇒ loi Bin. de paramètres $\begin{cases} n=4 \\ p=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow P_4(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8} = \boxed{37,5\,\%}$

b) Famille de 5 enfants : $n=5$ $p=\frac{1}{2}$ ⇒ $P_5(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

⇒ p("3 Garçons sur 5 enfants") $= 10 \times \frac{1}{2^5} = \frac{5}{16} = \boxed{31,3\,\%}$.

c) $E[X] = n \times p = 5 \times \frac{1}{2} = \boxed{2,5}$ GARÇONS en moyenne pour une famille de 5 enfants.

d) Loi Binomiale de paramètres $\begin{cases} n=5 \\ p=52\% \end{cases}$ $\Rightarrow P_5(X=3) = \binom{5}{3}(0,52)^3 \times (0,48)^2 \simeq \boxed{32,4\,\%}$

2°) PILE ou FACE

a) Nombre de tirages : $N = 2n$. Probabilité de "Pile" : $p = \frac{1}{2}$. } Loi Binomiale :

$$P_n = P_{2n}(X=n) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n! \times (2n-n)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{(2n)!}{(n!)^2 \times 2^{2n}}}.$$

b) $E[X] = N \times p = 2n \times \frac{1}{2} = \boxed{n}$ = Nombre moyen de piles sur $2n$ tirages.

c) on prend $n! \simeq \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow (2n)! = \sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = 2\sqrt{n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times 2^{2n}$.

$(n!)^2 = 2n\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$ donc $P_n \simeq \frac{2\sqrt{n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times 2^{2n}}{2n\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$. CQFD.

NB : $\begin{cases} (2n)! \neq 2[(n!)]. \\ (n!)^2 \neq (n^2)! \end{cases}$ il suffit de vérifier pour $n=2$ ou $n=3$....

on en déduit donc $\lim P_n = 0$ i.e. la probabilité d'obtenir globalement autant de "Pile" que de "Face" tend vers 0 lorsque l'on augmente indéfiniment le nombre de tentatives.

{ Pourtant l'Espérance ~~Mathématique~~ Mathématique est égale à n, c'est à dire que l'on peut en moyenne espérer n piles sur $2n$ tirages, mais cette moyenne du Nombre de piles obtenus n'est pas la probabilité d'obtenir exactement n piles sur $2n$ }

Ô mirabile mathematica mysterium !

NB Selon le professeur SHADOKO "plus ça rate, plus on a de chances de gagner" s'avère totalement FAUX !