I - Formule de König : $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$V[X] = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-m)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 p_i - 2m x_i p_i + m^2 p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \sum_{i=1}^{n} (2m x_i p_i) + \sum_{i=1}^{n} (m^2 p_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$$

or $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = E[X^2]$; $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E[X] = m$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (100%).

d'où $V[X] = E[X^2] - 2m^2 + m^2 = E[X^2] - E[X]^2$ CQFD.

II - Espérance de la LOI BINOMIALE : on veut montrer que $\boxed{E[X] = np}$.

1°) $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2°) Binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Attention !

Donc de même : $(a+b)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} a^p b^{(n-1)-p} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{(n-1)-(k-1)}$ en posant $p = k-1 \Rightarrow \begin{cases} p=0 \Leftrightarrow k=1 \\ p=n-1 \Leftrightarrow k=n \end{cases}$

et en remarquant que $(n-1)-(k-1) = n-k$

on obtient : $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{n-k}$.

d'où suite $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} a^{k-1} b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{n-k} = n\overbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{n-k}}^{(a+b)^{n-1}}$. CQFD.

3°) Dans le cas de la loi Binomiale de paramètres n et p, les aléas sont les nombres de "succès" sur les n tirages indépendants. ($q = 1-p$).

donc $E[X] = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k$ avec $x_k = k$ et $p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ mais le 1er terme de cette somme est nul. ($k=0$).

4°) Donc $E[X] = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p\left[\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k}\right] = p\left[n(p+q)^{n-1}\right]$

or $p+q=1$ donc on a bien $E[X] = n.p$.

Autre démo (BONUS) : soit $f(x) = (px+q)^n \Rightarrow f'(x) = np(px+q)^{n-1}$

et $(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k x^k q^{n-k} \Rightarrow f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k x^{k-1} q^{n-k}$

Donc : $np(px+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k x^{k-1} q^{n-k}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$)

En particulier pour $x=1$ on a $np(p+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + 0\binom{n}{0} p^0 q^n$.

et avec $p+q=1$ $np = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = E[X]$ CQFD.

NB : on pourrait également démontrer que dans le cas BINOMIAL $\boxed{V[X] = npq}$ (Démo ici ?)