jml@ecole-alsacienne.org

Probas Probables

R.O.C. I :[2 pts cadeau] Démontrer la formule V[X] = E[X²] – E[X]² (dite formule de König).

Hypothèses : X est une variable aléatoire sur un ensemble fini Ω. On note x_i les valeurs (aléas) de cette variable X, et p_i la probabilité de l'évènement (X= x_i). On rappelle que l'Espérance Mathématique de la variable aléatoire X s'écrit : $E[X] = \Sigma\, x_i\, p_i$ et que la Variance de X est la moyenne pondérée des écarts quadratiques, c'est-à-dire que : $V[X] = \Sigma\, (x_i - m)^2\, p_i$ avec $m = E[X] = \Sigma\, x_i\, p_i$

R.O.C. II [4 pts pascadeau] 1°) Démontrer la formule suivante : $k\,.\binom{n}{k} = n\,.\binom{n-1}{k-1}$ (1)

2°) A l'aide de la formule du binôme de Newton et de (1), en déduire l'égalité : $\sum_{k=1}^{k=n} k\,.\binom{n}{k} a^{k-1}.b^{n-k} = n(a+b)^{n-1}$ (2)

3°) Montrer que l'Espérance Mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est : $E[X] = \sum_{k=0}^{k=n} k\,.\binom{n}{k} p^k\,.q^{n-k}$ (3)

4°) A l'aide de l'égalité du **(2)** En déduire la formule E[X] = np

[Bonus] 5°) Développer selon la formule du binôme $f(x) = (px + q)^n$ pour x Réel. En déduire 2 expressions de f '(x), puis retrouver la formule de l'Espérance de la loi Binomiale.

EXERCICE III - [5 pts fastoche] Applications Numériques de la Loi Binomiale.

1°) On suppose que dans un couple les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales.

a) Quelle est la probabilité pour que ce couple qui désire avoir 4 enfants ait 2 garçons et 2 filles ?
b) Quelle est la probabilité pour que ce couple qui désire avoir 5 enfants ait 3 garçons et 2 filles ?
c) Quelle est l'espérance mathématique dans ce dernier cas ?
d) Même question que b) si la probabilité d'avoir un garçon est en réalité de 52 % ?

2°) Soit n un entier naturel quelconque. On joue 2n fois à pile ou face avec une pièce non truquée.

a) Quelle est en fonction de n la probabilité P_n d'obtenir exactement n pile sur les 2n tirages ?
b) Quelle est l'espérance Mathématique en fonction de n ? Interpréter ce résultat.
c) On sait que pour n très grand on a une approximation de n! par la formule de Stirling : $n! \cong \sqrt{2\pi n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n$

En déduire que pour n très grand, on a $P_n \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et la limite de P_n en l'infini ?

EXERCICE IV [5 points]

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ».

A la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ».

Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.

Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8% de celles du rayon «journaux» portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela, il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ».On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face étrangère.
   a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les para- mètres de cette loi. (0,5point)
   b) Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère. (0,75 point)
   c) Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère. (0,75 point)
2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac. On prélève au hasard une pièce du sac. On note S l'événement : « La pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « La pièce porte une face étrangère ».
   a) Déterminer P(S), Ps(E) ; en déduire $P(S \cap E)$. (0,75 point)
   b) Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16. (0,5 point)
   c) Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ». (0,75 point)
3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16. Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9. (1 point)

EXERCICE V [4 points]

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un, composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; +∞[: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $\mathbf{p([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx}$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines permet de poser **p([0 ; 200[ ) = 0,5.**

1. Montrer que $\lambda = \mathbf{\frac{\ln 2}{200}}$
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la **limite quand A tend vers** + ∞ de $\int_0^A \lambda.x.e^{-\lambda x}\, dx$
   a. Montrer que $\int_0^A \lambda.x.e^{-\lambda x}\, dx = \frac{-\lambda.A.\, e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$
   b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.