On a donc $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$.

$\Rightarrow [\ln t]_1^n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Rightarrow -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq -\ln n$ ($\ln 1 = 0$).

Par suite (encore !) $u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\sum \frac{1}{k}} \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$.

Donc $0 \leq \lim u_n \leq \lim e^{-1-\frac{1}{4}\ln n} = 0$ car $\ln n \to +\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$

Donc $\boxed{\lim u_n = 0.}$

[C] $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t} dt}{n!}$ ; $I_1(a) = \int_0^a t \cdot e^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^a - \int_0^a -e^{-t} dt$.

$\Rightarrow I_1(a) = -ae^{-a} - [e^{-t}]_0^a = -ae^{-a} - e^{-a} + 1 = \boxed{-e^{-a}(1+a) + 1.}$

2°) $t > 0 \Rightarrow e^t > e^0 = 1 \Rightarrow e^{-t} < 1 \Rightarrow \frac{t^n e^{-t}}{n!} \leq \frac{t^n}{n!} \Rightarrow 0 \leq \int_0^a f_n(t) dt$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^a f_n(t) dt \leq \int_0^a \frac{t^n}{n!} dt \Rightarrow 0 \leq I_n(a) \leq \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1) n!}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.

3°).a) D'après B.1°)a) $(u_n) \searrow$ donc $u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$, car $u_n < u_1 = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \frac{1}{n!} < 1 \Rightarrow \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n \Rightarrow 0 \leq I_n(a) < a^{n+1} \times \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{ea}{n+1}\right)^{n+1}$.

soit $b_n = \left(\frac{ea}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \ln(b_n) = (n+1) \ln\left[\frac{ea}{n+1}\right] \to -\infty \Rightarrow b_n \to 0^+$.

Par suite $\lim I_n(a) = 0^+$.

4°. a) $I_n(a) = \frac{1}{n!} \int_0^a t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} [t^n(-e^{-t})]_0^a + \frac{n}{n!} \int_0^a t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$.

$t^n \to n t^{n-1}$, $e^{-t} \to -e^{-t}$

b) $\Rightarrow \boxed{I_n(a) = -e^{-a} \cdot \frac{a^n}{n!} + I_{n-1}(a).}$ $\boxed{n \geq 2}$.

$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -e^{-a} \frac{a^n}{n!}$

$I_{n-1}(a) - I_{n-2}(a) = -e^{-a} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$

- - - - - - - - - -

$I_2(a) - I_1(a) = -e^{-a} \frac{a^2}{2!}$

Par addition membre à membre et réduction.

$I_n(a) = I_1(a) - e^{-a} \sum_{k=2}^n \frac{a^k}{k!}$ $(n \geq 2)$

$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left[(1+a) + \sum_{k=2}^n \frac{a^k}{k!}\right]$

$I_n(a) - I_1(a) = -e^{-a} \cdot \sum_{k=2}^n \frac{a^k}{k!}$

$\Rightarrow \boxed{I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}}$ • $a^0 = 1$ • $0! = 1$

Pour $n = 1$ on a $I_1(a) = 1 - e^{-a}(1+a)$ OK. compatible avec ↑.

5°) $\lim I_n(a) = 0 \Rightarrow$ et $\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = e^a - e^a I_n(a)$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = e^a}$

On a finalement démontré que pour tout $x \geq 0$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

ce que l'on appelle DEVELOPPEMENT de Exp $x$ en SÉRIE ENTIÈRE ■

Résultat fondamental en Analyse....