Etude de la suite $\boxed{\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}}$ (voir aussi co/D6/).

TS4 / Co / C8 / 08.03.05 / p. 1/2

[A] $f_n(x) = \dfrac{x^n . e^{-x}}{n!}$ $(x > 0)$. $\boxed{n>0}$

$f_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\left(n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}\right) = \dfrac{x^{n-1} e^{-x}}{n!}\left[n - x\right]$.

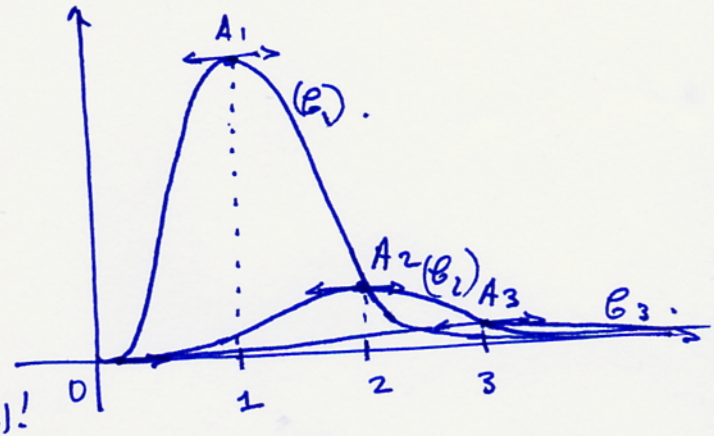
x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	+	0	−	
f_n	0	↗	u_n	↘	0

• $f_n(0) = 0$; $f_n(n) = \dfrac{n^n . e^{-n}}{n!} = u_n$; $\lim\limits_{+\infty} f_n = 0$

• Position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n-1})$:

$f_n(x) - f_{n-1}(x) = \dfrac{x^{n-1} e^{-x}}{(n-1)!}\left[\dfrac{x}{n} - 1\right]$.

Donc $f_n(x) \geq f_{n-1}(x) \iff \boxed{x \geq n}$.



• $A_n(n ; f_n(n)) \in \mathcal{C}_{n-1} \iff \boxed{f_{n-1}(n) = f_n(n)}$

$\iff \dfrac{n^{n-1} . e^{-n}}{(n-1)!} = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ VRAI car $n! = n \times (n-1)!$

• $f_n'(0) = 0$ pour tout $n > 0$.

• $u_1 = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \simeq 0,3$ • $u_2 = e^{-2} = 0,09$ • $u_3 = \dfrac{e^{-3}}{2} \simeq 0,0015$

[B]. $u_n = f_n(n) = \dfrac{n^n . e^{-n}}{n!}$; on sait que $f_n(n) = f_{n-1}(n)$

et $f_{n-1}(n-1)$ étant le MAXIMUM de f_{n-1} sur $[0 ; +\infty[$ on a $f_{n-1}(n-1) \geq f_{n-1}(n)$.

Donc pour tout $n \geq 1$, $u_{n-1} \geq u_n \iff (u_n) \searrow$ (Evident sur la figure).

De plus $u_n \geq 0$ Donc (u_n) décroissante et minorée CONVERGE vers $\boxed{\ell \geq 0}$

2°) a) $\boxed{g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}}$ $t \in [0 ; 1]$

t	0		1
$g'(t)$		−	
g	0	↘	−0,15

$g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 + \dfrac{t}{2} = \dfrac{2 - 2 - 2t + t(1+t)}{(1+t)2} = \boxed{\dfrac{t(t-1)}{2(1+t)}}$

$g(0) = 0$ car $\ln 1 = 0$ et $g(1) = \ln 2 - \dfrac{3}{4}$

Donc $g(t) \leq 0$ sur $[0 ; 1] \iff \boxed{\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}}$ sur $[0 ; 1]$ CQFD

b) par suite $1 + t \leq e^{t - \frac{t^2}{4}}$. $(t = \frac{1}{n}) \implies 1 + \dfrac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}} \implies \boxed{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}}$

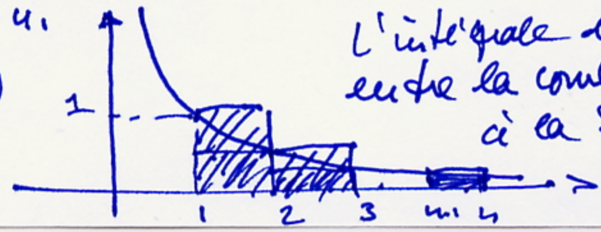
3°) a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^n e^{-n}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \times e^{-1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \times e^{-1} \leq e^{1 - \frac{1}{4n}} \times e^{-1} = e^{-\frac{1}{4n}}$

Donc pour tout $n > 0$ $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq e^{-\frac{1}{4(n-1)}}$; $\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq e^{-\frac{1}{4(n-2)}}$; … ; $\dfrac{u_2}{u_1} \leq e^{-\frac{1}{4}}$.

Par suite (Aïe !) $\dfrac{u_n}{u_1} = \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \times \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \dfrac{u_3}{u_2} \times \dfrac{u_2}{u_1} \leq e^{-\frac{1}{4(n-1)}} \times e^{-\frac{1}{4(n-2)}} \times \dots \times e^{-\frac{1}{4}}$.

$\implies \dfrac{u_n}{u_1} \leq e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1\right)}$ or $u_1 = e^{-1}$ d'où $\boxed{u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1\right)}}$

4°) a)



L'intégrale de $f(t) = \dfrac{1}{t}$ sur $[1 ; n]$ est l'aire comprise entre la courbe et l'axe sur $[1 ; n]$ qui est inférieure à la somme des aires des rectangles (Intégrale de la f. en escalier majorante).