TS4/C8/08/03/05/P2

4. *a*) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

(on pourra utiliser des considérations d'aires).

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$$

c) Quelle est la limite de la suite (u_n)?

C) Pour tout entier $n > 0$ et pour tout réel a positif ou nul, fixé, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}\, dt.$$

1. Calculer $I_1(a)$.

2. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel t positif ou nul, on a :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3. *a*) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

(on pourra utiliser **B)** 1. *a*)).

b) Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. *a*) Établir pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right).$$

Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$?

5. Démontrer que pour tout a de $[0, +\infty[$ on a :

$$e^a = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$$

BONUS