PROBLEME [10 points]

Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$, d'autre part de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.
Pour tout entier $n > 0$, on note f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 10$ cm.

A) 1. Déterminer le tableau de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, étudier la position relative de C_n et de C_{n-1} et vérifier que le point A_n de coordonnées $(n, f_n(n))$ appartient à C_{n-1}.

3. Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes C_1, C_2 et C_3; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

B) Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$.

1. *a*) En utilisant les résultats du A, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) La suite (u_n) est-elle convergente?
Justifier.
On se propose, dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.

2. *a*) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

En utilisant les variations de g, démontrer que pour tout t de $[0, 1]$ on a :

$$\ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1 - \frac{1}{4n}}.$$

3. *a*) Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)}.$$