II - Calcul d'Intégrales par combinaisons linéaires.

| TS4 / 06 / C7 / 08.02.05 | (2)/2

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1. $f'(x) = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)' = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow I = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \boxed{\ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}}$

$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$

2. $J + 2I = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right] dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$ CQFD

2.b) $K = \int_0^1 1.\sqrt{x^2+2}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \boxed{\sqrt{3} - J}$ CQFD.

$\uparrow x \qquad \downarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$* \ \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\times 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$

2.c) $\begin{cases} J + K = \sqrt{3} \\ J - K = -2I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2I) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})}{2} \\ K = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2I) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})}{2} \end{cases}$

III - Comparaison Suites & Intégrales.

$I_0 = \int_0^1 e^x\,dx$; $I_n = \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-x)^n e^x\,dx$

1.a) $\int_0^1 (1-x)^n\,dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}$.

b) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \exp(0) \leq \exp(x) \leq \exp(1) \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e$ (car Exp ↗ sur $\mathbb{R}$)

$(1-x)^n$ étant POSITIF sur $[0;1] \Rightarrow \frac{(1-x)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}(1-x)^n e^x \leq \frac{e}{n!}(1-x)^n$.

c) $(1-x)^n$ étant POSITIF sur $[0;1]$ (Par conservation de l'ordre)

et en intégrant membre à membre entre 0 et 1 :

$\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\,dx \leq I_n \leq \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\,dx$ d'où $\boxed{\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}}$ (*)

(car $(n!)(n+1) = (n+1)!$).

d) $(n+1)! = (n+1)\times(n)\times(n-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 \geq 2^n \to +\infty$ donc $\boxed{\lim I_n = 0}$ (th des Gend.).

2. a) $I_0 = [e^x]_0^1 = \boxed{e-1}$; $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x\,dx = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx = -e^0 + I_0 = \boxed{e-2}$.

b) $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x\,dx = \left[\frac{(1-x)^n e^x}{n!}\right]_0^1 + \frac{n}{n!}\int_0^1 (1-x)^{n-1}e^x\,dx = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1}e^x\,dx$

$\downarrow -n(1-x)^{n-1} \qquad \uparrow e^x$

$\Rightarrow \boxed{I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}}$ CQFD

3. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n \\ \frac{1}{(n-1)!} = I_{n-2} - I_{n-1} \\ \cdots \\ \frac{1}{2!} = I_1 - I_2 \\ \frac{1}{1!} = I_0 - I_1 \end{array}\right\}$ Addition membre à membre et Réduction.

$J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Donc $J_n = 1 + I_0 - I_n = e - I_n$. (2)

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} J_n = e$ (car $\lim I_n = 0$).

Ainsi $\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

$J_n - 1 = I_0 - I_n$. (Dominos !) et $J = e$

Donc $J - J_n = I_n$. d'après (2) donc d'après (*) $\frac{1}{(n+1)!} \leq J - J_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 0$

- $J - J_n$ s'appelle le RESTE de la série $\frac{1}{n!}$.