• Intégrales • Intégrales • Intégrales • Intégrales • Intégrales

[Calculatrices autorisées]

EXERCICE 1 [4 points] **Calcul d'aire et de volume.**

Dans un repère orthonormé avec pour unité 2cm, on désigne par (C) la courbe représentative de la fonction définie par $\mathbf{f(x)} = \boldsymbol{Cos^2 x}$ sur l'intervalle $[-\pi/2 ; \pi/2]$.

1. Etudier les variations de f et tracer la courbe (C).
2. Déterminer l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C) et l'axe Ox sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$.
3. Linéariser $\boldsymbol{Cos^4 x}$. *(on montrera clairement les calculs intermédiaires sur la copie)*
4. Soit (S) le solide engendré par rotation d'un *demi-tour* de la courbe (C) autour de l'axe Ox. Calculer son volume en cm^3.

EXERCICE 2 [4 points] **Calcul d'une intégale par décomposition et IPP.**

1. Montrer que quelque soit le Réel $X \neq -1$ on a : $\dfrac{1}{(X+1)^2} = 1 - \dfrac{X}{X+1} - \dfrac{X}{(X+1)^2}$
2. En déduire l'intégrale $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx$
3. Déterminer une primitive de la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}$
4. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, $\mathbf{J} = \displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,dx$

EXERCICE 3 [5 points] **Calcul d'intégrales par combinaisons linéaires.**

L'objectif est de calculer les 3 intégrales suivantes :

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \qquad \mathbf{J} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \qquad \mathbf{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1. Calcul de I : Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$
   a. Calculer la dérivée de la fonction f *(indiquer les calculs intermédiaires sur la copie)*
   b. En déduire la valeur de I. *(indiquer les calculs intermédiaires sur la copie)*
2. Calcul de J & K :
   a. Sans calculer explicitement J et K vérifier que J + 2 I = K
   b. A l'aide d'une intégration par parties sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$
   c. En déduire les valeurs de J et K.

EXERCICE 4 [7 points] **Comparaison de suites et d'intégrales.**

On considère la suite définie par $\mathbf{I_0} = \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{I_n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n!}(1-x)^n e^x\,dx$

1. a) Calculer $\int_0^1 (1-x)^n\,dx$.

   b) Montrer que sur [0 ; 1] on a $1 \leq e^x \leq e$

   c) En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$

   d) Montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. a) Calculer I_0 , puis I1 à l'aide d'une intégration par parties.

   b) Etablir, en intégrant par parties, que pour tout $n \geq 1$ on a la relation $\mathbf{I_{n-1} - I_n = \dfrac{1}{n!}}$ (1)
3. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{Jn = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}}$
   a. En utilisant les relations (1), exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n.
   b. En déduire la limite J de la suite (J_n).
   c. Justifier l'encadrement $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq J - J_n \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$